Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

Analyse matricielle-L3

Feuille d'exercices n° 4 – Corrigé des exercices 1, 2 et 3

FONCTIONS PÉRIODIQUES, SÉRIES DE FOURIER, TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE.

Corrigé de l'exercice 1.

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique de période 1 et de classe $\mathcal{C}^m$, $m \geq 1$.

1. Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et 1-périodique. La fonction g est continue donc bornée sur le compact $[0,1]$ (elle atteint aussi ses bornes). De plus, par périodicité, $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |g(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$ donc g est bornée sur $\mathbf{R}$.

2. La fonction est de classe $\mathcal{C}^m$ donc $f, f', \ldots, f^{(m)}$ sont continues et leurs coefficients de Fourier sont bien définis.

   Soit $k \in \mathbb{Z}^*$, par intégration par parties et vu que f est 1-périodique, on a :

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \int_0^1 f(x)e^{-2i\pi kx}dx = \left[f(x) \times \frac{e^{-2i\pi kx}}{-2i\pi k}\right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\frac{e^{-2i\pi kx}}{-2i\pi k}dx \\ &= \frac{f(1)-f(0)}{-2i\pi k} + \int_0^1 f'(x)\frac{e^{-2i\pi kx}}{2i\pi k}dx \quad (\text{car } e^{-2i\pi k} = 1) \\ &= \frac{1}{2i\pi k}c_k(f'), \end{aligned}$$

   et donc par récurence, pour tout $1 \leq p \leq m$: $c_k(f) = \dfrac{1}{(2i\pi k)^p}c_k\big(f^{(p)}\big)$.

3. On obtient alors, pour $k \in \mathbb{Z}^*$:

$$|c_k(f)| = \frac{1}{|2\pi k|^m}\left|c_k\big(f^{(m)}\big)\right| \leq \frac{1}{|k|^m} \times \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^1 |f^{(m)}(x)|dx.$$

   On a montré le résultat avec $C = \dfrac{1}{(2\pi)^m}\displaystyle\int_0^1 |f^{(m)}(x)|dx$.

   On peut aussi majorer C en utilisant la norme infinie de $f^{(m)}$ ($f^{(m)}$ est bornée sur $\mathbf{R}$, voir question 1) : $C \leq \frac{1}{(2\pi)^m}\|f^{(m)}\|_\infty$.

4. Soit $m \geq 2$.

   Pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$, $\|c_k(f)e_k\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |c_k(f)e^{2i\pi kx}| = |c_k(f)| \leq \dfrac{C}{|k|^m}$.

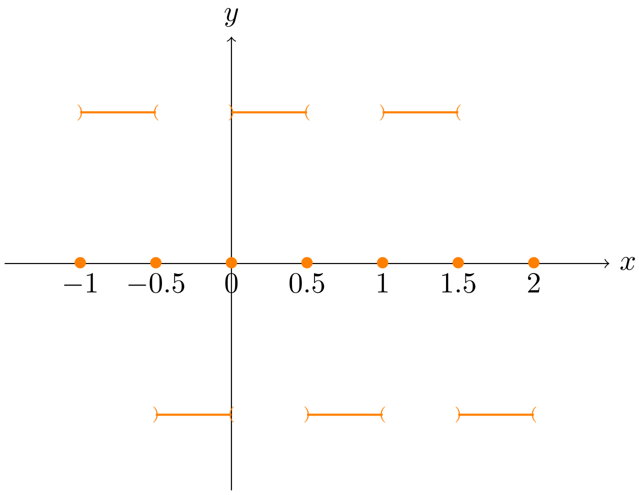
   Or la série numérique $\sum_k \frac{1}{|k|^m}$ est convergente, par suite la série de Fourier de f est normalement convergente.

   Remarque. On peut encore montrer la convergence normale de la série de Fourier de f quand f est de classe $\mathcal{C}^1$. On utilise[1] que pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$, $|c_k(f)| = \dfrac{|c_k(f')|}{2\pi|k|} \leq \dfrac{1}{4\pi}\Big(|c_k(f')|^2 + \dfrac{1}{k^2}\Big)$. Chacune des séries $\sum |c_k(f')|^2$ et $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente (théorème de Parseval pour la première), donc $\sum |c_k(f)|$ est convergente et la série de Fourier de f converge normalement.

1. Pour tous réels a et b, $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. Voici la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1, 2]$.



2. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et on vérifie facilement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

et donc par le théorème de Dirichlet, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = f(x)$.

3. D'abord, f est impaire et 1-périodique, par suite , $c_0(f) = 0$.
En effet, $c_0(f) = \int_0^1 f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 0.$
La fonction f est à valeurs réelles, et donc on a aussi : $\forall n \in \mathbb{Z}, c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.
En effet, $\overline{c_n(f)} = \int_0^1 \overline{f(x)e^{-2in\pi x}}dx = \int_0^1 f(x)e^{2in\pi x}dx = c_{-n}(f).$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
c_n(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2in\pi x}dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2in\pi x}dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-2in\pi x}dx \\
&= \left[\frac{e^{-2in\pi}}{-2i\pi n}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{e^{-2in\pi}}{-2i\pi n}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{in\pi}(1 - e^{-i\pi n}) \\
&= \frac{1}{in\pi}(1 - (-1)^n).
\end{aligned}$$

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $c_{2k} = 0$ et $c_{2k+1} = -\dfrac{2i}{(2k+1)\pi}$.

4. Soit $N \in \mathbf{N}^*$, $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{2i\pi kx} = c_0(f) + \sum_{k=1}^{N}(c_k(f)e^{2i\pi kx} + c_{-k}(f)e^{-2i\pi kx}) = \sum_{k=1}^{N}\Big(2\,\mathcal{R}e\big(c_k(f)e^{2i\pi kx}\big)\Big) \\
&= \sum_{1\le 2j+1\le N}\Big(2\,\mathcal{R}e\big(c_{2j+1}(f)e^{2i\pi(2j+1)x}\big)\Big) \quad \text{(les termes pour } k \text{ pair sont nuls)} \\
&= \sum_{1\le 2j+1\le N}\Big(2\,\mathcal{R}e\Big(-\frac{2i}{(2k+1)\pi}e^{2i\pi(2j+1)x}\Big)\Big) \\
&= \sum_{1\le 2k+1\le N}\frac{4}{(2j+1)\pi}\sin(2\pi(2j+1)x) \\
&= \sum_{j=0}^{[(N-1)/2]}\frac{4}{(2j+1)\pi}\sin(2\pi(2j+1)x).
\end{aligned}$$

5. On sait par la formule de Parseval :

$$1 = \int_0^1 |f(x)|^2dx = 2\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^2 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On pose $s = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, on a :

$$s = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{s}{4}.$$

On déduit que $s = \frac{\pi^2}{6}$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\alpha_k = e^{\frac{2ik\pi}{N}}$. Alors, $\alpha_k = 1$ si et seulement si $k \in N\mathbb{Z}$.
   Ainsi, si $k \in N\mathbb{Z}$ alors $s_{N,k} = N$. Sinon, on écrit

$$\begin{aligned}
s_{N,k} &= \sum_{j=0}^{N-1} e^{2i\pi kj/N} = \sum_{j=0}^{N-1}\alpha_k^j \\
&= \frac{1-\alpha_k^N}{1-\alpha_k} \quad \text{on a bien } \alpha_k \neq 1 \\
&= \frac{1-e^{2i\pi k}}{1-\alpha_k} = 0.
\end{aligned}$$

   On a bien montré $s_{N,k} = \begin{cases} N & \text{si } N \text{ divise } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$R_N(e_k) = \int_0^1 e^{2i\pi kx}dx - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}e^{\frac{2ikj\pi}{N}} = \int_0^1 e^{2i\pi kx}dx - \frac{1}{N}s_{N,k}.$$

   On calcule la première intégrale en distinguant les cas $k \neq 0$ et $k = 0$. On obtient

$\int_0^1 e^{2i\pi kx}dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} R_N(e_k) &= \begin{cases} -1 & \text{si } N \text{ divise } k \text{ et } k \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1 & \text{si } k \in N\mathbf{Z}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Soit f une fonction périodique de période 1 et de classe $\mathcal{C}^m$, $m \geq 2$.

   (a) Comme on l'a revu à l'exercice 1, la série de Fourier de f converge normalement vers f dans ce cas. On a

   $$R_N(f) = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right).$$

   D'abord, en utilisant la convergence normale, on peut échanger intégrale et somme infinie donc

   $$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)e_k(x)dx = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)\int_0^1 e_k(x)dx$$

   Ensuite, on peut échanger la somme finie et la somme infinie donc

   $$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)e_k\left(\frac{j}{N}\right) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e_k\left(\frac{j}{N}\right)\right).$$

   Ainsi, on a

   $$\begin{aligned} R_N(f) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)\int_0^1 e_k(x)dx - \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e_k\left(\frac{j}{N}\right)\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)R_N(e_k). \end{aligned}$$

   (b) En utilisant la valeur de $R_N(e_k)$ obtenue précédemment on en déduit directement que

   $$R_N(f) = -\sum_{l\in\mathbf{Z}^*} c_{lN}(f).$$

   Par la question 4 de l'exercice 1, il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $l \in \mathbf{Z}^*$, $|c_{lN}(f)| \leq \frac{C_1}{|lN|^m}$. Ainsi,

   $$|R_N(f)| \leq \frac{C_1}{N^m}\sum_{l\in\mathbf{Z}^*}\frac{1}{|l|^m}.$$

   De plus la série $\sum \frac{1}{|l|^m}$ est convergente. On note s sa somme, avec $C = C_1 s$, on déduit que :

   $$|R_N(f)| \leq \frac{C}{N^m}.$$