
Feuille d'exercices n° 4

FONCTIONS PÉRIODIQUES, SÉRIES DE FOURIER, TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE.

Notations, rappels.

Dans la suite, on utilise les notations suivantes.

1. On note, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $e_k : \mathbf{R} \to \mathbf{C},\ x \mapsto e^{2i\pi kx}$.
2. Pour toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ périodique de période 1, on note $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbf{Z}}$ les coefficients de Fourier de f (quand ils sont bien définis) : pour tout $k \in \mathbf{Z}$,
$$c_k(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2i\pi kx}dx.$$
On rappelle qu'en particulier, ces coefficients sont bien définis si f est continue par morceaux. Toutes les fonctions considérées dans la suite seront au moins continues par morceaux sur $\mathbf{R}$.
3. Quand les coefficients précédents sont bien définis, on définit la série de Fourier associée à f, c'est la série de fonctions $\sum c_k(f)e_k$.
Les sommes partielles sont notées pour tout $N \in \mathbf{N}$, $S_N(f) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e_k$.
Pour tout $N \in \mathbf{N}$, $S_N(f)$ est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$: $\forall x \in \mathbf{R}, S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{2i\pi kx}$.
4. Des résultats de convergence ont été rappelés en cours. On les redonne ici.
   (a) *Sur la convergence ponctuelle, le théorème de Dirichlet.*
   Théorème. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) \quad \text{où } f(x^\pm) = \lim_{y\to x^\pm} f(y).$$
   Si de plus f est continue, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{2i\pi kx}$.
   (b) *Sur la convergence dans L^2, le théorème de Parseval.*
   Théorème. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 1-périodique et continue par morceaux, alors $(S_N(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $L^2(0,1)$ vers f.
   Et on a $\|f\|_2^2 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$.

Exercice 1. *Quelques rappels sur les séries de Fourier*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique de période 1 et de classe $\mathcal{C}^m$, $m \geq 1$.

1. *Préambule.* Montrer que si $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et 1-périodique, alors g est bornée sur $\mathbf{R}$.
2. Justifier que les coefficients de Fourier de f et de ses m premières dérivées sont bien définis. Montrer que pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq m$, tout $k \in \mathbf{Z}^*$, $c_k(f) = \dfrac{1}{(2i\pi k)^p}c_k\big(f^{(p)}\big)$.

3. Montrer qu'il existe $C > 0$ (dépendant de f et m) tel que pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$, $|c_k(f)| \leq \dfrac{C}{|k|^m}$.
4. On suppose de plus que $m \geq 2$. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement.

   Rappel. Montrer la convergence normale de la série de fonctions $\sum c_k(f)e_k$, c'est montrer la convergence de la série numérique $\sum \|c_k(f)e_k\|_\infty$.

Exercice 2. *Un exemple de calcul*

On considère la fontion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 1-périodique, définie sur $[0, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1/2[, \\ -1 & \text{si } x \in]1/2, 1[, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1/2. \end{cases}$$

1. Dessiner la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1, 2]$.
2. Justifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N(f)(x)$. *Il faut être précis, f n'est pas continue.*
3. Calculer les coefficients de Fourier de f.
4. Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $S_N(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin(2\pi(2j+1)x)$.
5. En utilisant l'égalité de Parseval, montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3. *Intégration numérique des fonctions périodiques*

On connaît des formules d'intégration numérique et les estimations d'erreurs correspondantes pour des fonctions quelconques (régulières). Pour les fonctions périodiques, des compensations globales permettent d'obtenir de bien meilleures estimations, au point qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser une autre formule que celle de rectangles quand on intègre une fonction périodique sur une période. *Ce résultat est mentionné et admis dans le cours, on le démontre ici.*

Le but de cet exercice est démontrer le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit f une fonction 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^m$, $m \geq 2$. Alors, il existe une constante C (dépendant de f et m) telle que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,*

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) \right| \leq \frac{C}{N^m}.$$

Dans la suite, on fixe $N \in \mathbf{N}^*$. On note pour tout $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ comme ci-dessus,

$$R_N(f) = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right).$$

1. *Préliminaire.* Soit $k \in \mathbf{Z}$, on note $s_{N,k} = \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} e^{2i\pi kj/N}$. Montrer que $s_{N,k} = \begin{cases} N & \text{si } N \text{ divise } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   On reconnaîtra une somme partielle de série géométrique.
2. En déduire $R_N(e_k)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

3. Soit f une fonction périodique de période 1 et de classe $\mathcal{C}^m$, $m \geq 2$. *Dans cette partie, on utilisera les résultats revus à l'exercice 1.*

   (a) Montrer que $R_N(f) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(f) R_N(e_k)$.

   (b) En déduire que $R_N(f) = -\sum_{l \in \mathbf{Z}^*} c_{lN}(f)$, puis qu'il existe $C > 0$ (dépendant de f et m) tel que

$$|R_N(f)| \leq \frac{C}{N^m}.$$

Exercice 4. *Interpolation trigonométrique*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique de période 1. Dans la suite, on fixe $N \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on note

$$\widehat{f}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2i\pi kj/N}$$

la transformée de Fourier discrète de f à N points.

1. *Les deux résultats suivants sur la transformée de Fourier discrète sont montrés dans le cours. C'est bien de savoir refaire les preuves. Le résultat de la question 1 de l'exercice 3 est utile.*

   (a) Montrer que $\widehat{f}_N$ est N-périodique, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\widehat{f}_N(k+N) = \widehat{f}_N(k)$.

   (b) Montrer que pour tout $j \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leq j \leq N$, $f\left(\frac{j}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}_N(k) e^{2i\pi kj/N}$.

2. *Construction d'un polynôme trigonométrique d'interpolation. On cherche un polynôme trigonométrique qui prend les mêmes valeurs que f aux points $\frac{j}{N}$ avec $0 \leq j \leq N$.*

   On suppose que N est pair, et on note $P_N : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ le polynôme trigonométrique défini par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \widehat{f}_N(k) e^{2i\pi kx}.$$

   Montrer que pour tout $j \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leq j \leq N$, $P_N\left(\frac{j}{N}\right) = f\left(\frac{j}{N}\right)$.

3. ($\star$) *On peut aussi s'intéresser à la convergence de la suite $(P_N)_{N \geq 2}$ vers f sous les hypothèses suivantes.*

   On suppose que $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k(f)| < \infty$ et que $f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(f) e^{2i\pi kx}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

   (a) Soit $N \in \mathbf{N}^*$, $k \in \mathbf{Z}$, Avec les notations de l'exercice 3, vérifier que $c_k(f) - \widehat{f}_N(k) = R_N(fe_{-k})$. Montrer que pour tout $l \in \mathbf{Z}^*$, $c_{lN}(fe_{-k}) = c_{k+lN}(f)$, puis que

$$c_k(f) - \widehat{f}_N(k) = -\sum_{l \in \mathbf{Z}^*} c_{k+lN}(f).$$

   (b) Soit $N \in \mathbf{N}^*$, N pair. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|f(x) - P_N(x)| \leq 2 \sum_{|k| \geq N/2} |c_k(f)|.$$

   (c) En déduire la convergence uniforme de $(P_N)_{N \geq 2}$ vers f sur $\mathbf{R}$.