

École doctorale de sciences mathématiques de Paris-Centre  
Université Paris Diderot  
Laboratoire Jacques-Louis Lions

Mémoire pour obtenir  
l'habilitation à diriger des recherches en mathématiques

**Analyse et approximation d'équations aux dérivées partielles  
en rapport avec la mécanique des fluides**

Frédéric Lagoutière

Date de soutenance : jeudi 20 novembre 2008

Jury : François Bouchut  
Yann Brenier (rapporteur)  
José Antonio Carrillo (rapporteur)  
Albert Cohen  
Bruno Després  
Thierry Gallouët  
François Golse (rapporteur)  
Yvon Maday



Merci! Merci, Yann Brenier, José Antonio Carrillo, François Golse, d'avoir écrit un rapport sur mon mémoire. Merci aussi d'avoir accepté de participer à mon jury de soutenance; je remercie également François Bouchut, Albert Cohen, Bruno Després, Thierry Gallouët et Yvon Maday.

Je suis très heureux d'avoir pu mener les quelques études mathématiques dont il sera question dans 2 pages, pour une raison qui risque de ne pas transparaître dans cette suite : travailler avec des amis. Il a été pour moi un plaisir et un enrichissement constants de bosser avec Bruno, directeur de thèse parfait puis collègue, collaborateur, coach, ami sans qui j'aurais baissé les bras. Je suis très fier de ma capacité à bien « choisir » mes collaborateurs : plaisir et enrichissement aussi en travaillant avec Nicolas S. (je n'ai plus peur des problèmes de Riemann), Takéo, David R., Stéphane J., François D. (qui m'a initié aux probabilités à diriger des recherches!), Christophe, Benjamin, Philippe LF., Emmanuel L. Il a aussi été très chouette de travailler avec Frédéric C. (que de choses il m'a apprises!), Samuel, Edwige, Pierre-Arnaud, Annalisa, Gilles, Maya, Céline B., Laurent B., Étienne, Stéphane D.P., Erwan, Pierre-Henri, Aaron, Cécile, Thierry, Pauline... Même si nos travaux ne sont pas décrits dans ce résumé. Donc merci à tous.

Et aussi : de nombreux autres amis m'ont rendu la vie et le travail faciles et agréables, et productif : Lisl, Pascal H.&F.&O.&L., Paulo, Filipa, Ulrich, Joëlle, Valeria, Olivier B., Nicole, Stéphane M., Alexandra, Hugues, Jean-François, Giovanni, Hélène, Anne, Philippe H., David C., Evelyne, Jean-Marie, Jean-Baptiste, Antoine, Vincent, Franck, Laurent D., Sergio, Bertrand, Éric, Michaël, Francis, Marcella, Nicolas V., Olivier G., Simon, Driss, Stéphane D., Céline G., Jean-Paul, Benoît, Emmanuel A., Yves, Delphine. Hum, j'oublierai moins de monde en remerciant les organisateurs et participants des CEMRACS 1999, 2003, 2005, 2007 et 2008.

Je suis très reconnaissant à Evelyne, Frédéric C. et Nicolas S. d'avoir lu et amendé mon mémoire, avec attention mais avec tact! Leurs remarques m'ont été très précieuses. Merci.

Enfin, merci à Danielle Boulic, Khashayar Dadras, Christian David, Salima Lounici, Jacques Portès, Liliane Ruprecht, Florence Saidani et Michèle Wasse pour leur disponibilité et leur efficacité.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Modélisation et analyse</b>	<b>7</b>
1.1 Modèle diphasique simplifié . . . . .	7
1.2 Couplage Burgers-particule . . . . .	9
1.3 Diffusion numérique et ordre 1/2 . . . . .	13
1.4 Comportement asymptotique des solutions numériques . . . . .	19
1.5 Formalisme de Harten généralisé . . . . .	21
<b>2 Algorithmes et calcul</b>	<b>23</b>
2.1 Décentrage aval sous contraintes amont . . . . .	23
2.2 Schéma cinétique anti-dissipatif . . . . .	25
2.3 Transport de constituants . . . . .	29
2.4 Schémas de reconstruction . . . . .	32
2.5 Reconstructions discontinues pour solutions non classiques . . . . .	35
2.6 Reconstructions multi-dimensionnelles . . . . .	36



# Introduction

Dans ce mémoire je résume mes travaux de recherche publiés ou soumis pour publication listés ci-dessous (la référence exacte se trouve dans la bibliographie, à la page 41 de ce document).

[a]	Stability of a thermodynamically coherent multiphase model, publié avec Bruno Després et David Ramos .....	page 7.
[b]	A simple 1D model of inviscid fluid-solid interaction, publié avec Nicolas Seguin et Takéo Takahashi .....	page 9.
[c]	Probabilistic analysis of the upwind scheme for transport, écrit avec François Delarue (à paraître) .....	page 13.
[d]	Large time behavior of numerical solutions of scalar conservation laws .....	page 19.
[e]	Generalized Harten formalism and longitudinal variation diminishing schemes for linear advection on arbitrary grids, publié avec Bruno Després .....	page 21.
[f]	Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics, publié avec Bruno Després .....	page 23.
[g]	Numerical resolution of a two-component compressible fluid model with interfaces, publié avec Bruno Després .....	page 29.
[h]	Numerical transport of an arbitrary number of components, publié avec Stéphane Jaouen .....	page 29.
[i]	Stability of reconstruction schemes for scalar hyperbolic conservation laws ...	page 32.
[j]	Non-dissipative entropy satisfying discontinuous reconstruction schemes for hyperbolic conservation laws, soumis .....	page 32.
[k]	Convergent and conservative schemes for nonclassical solutions based on kinetic relations, publié avec Benjamin Boutin, Christophe Chalons et Philippe G. LeFloch .....	page 35.
[l]	Genuinely multi-dimensional non-dissipative finite-volume schemes for transport, publié avec Bruno Després (acte de congrès) .....	page 36.
[m]	An antidissipative transport scheme on unstructured meshes for multicomponent flows, soumis avec Bruno Després et Emmanuel Labourasse .....	page 36.

J'ai réparti ces travaux dans deux catégories : ceux qui ont trait à la modélisation et l'analyse mathématiques, [a], [b], [c], [d] et [e] (chapitre 1, *Modélisation et analyse*, qui commence à la page 7), et ceux dont la fin est le développement d'un nouvel algorithme de résolution approchée d'équations aux dérivées partielles (chapitre 2, *Développement de méthodes numériques et calcul scientifique*, commençant à la page 23).

**La partie *Modélisation et analyse*** est un peu disparate, elle regroupe

- deux articles de modélisation (de proposition de modèles devrais-je écrire, avec une analyse mathématique qui leur est consacrée) : il s'y agit d'un modèle simplifié de fluide compressible diphasique et d'un modèle simplifié de couplage fluide-structure ;
- trois articles d'analyse numérique : le premier propose une réinterprétation du schéma upwind pour le transport (en dimension quelconque) en termes probabilistes, réinterprétation qui permet de montrer qu'il est d'ordre 1/2 pour des données peu régulières, le deuxième établit un lien entre le caractère entropique d'un schéma numérique et le comportement en temps long de ses solutions,

et le troisième est l'étude d'un critère de décroissance de variation totale de la solution numérique d'algorithmes de volumes finis pour le transport en dimension 2 sur des maillages généraux.

La partie *Développement de méthodes numériques et calcul scientifique* est plus cohérente. Elle réunit des articles qui concernent tous le développement d'algorithmes anti-dissipatifs pour des équations aux dérivées partielles (hyperboliques) dans lesquelles le transport joue un rôle majeur : de l'équation d'advection en dimension 1 à des systèmes de la dynamique des gaz compressibles à plusieurs constituants en dimension 3 (en passant par exemple par les équations scalaires non linéaires). Même pour des équations de transport linéaires, le développement de schémas numériques précis semble une gageure (on aura compris à la lecture de [c] et [d] que la dissipation numérique est intimement liée à la stabilité, qu'il est donc difficile de trouver des algorithmes stables et non dissipatifs). Le sens d'anti-dissipatif est ici un peu différent du sens usuel : ce ne sont pas des schémas d'ordre élevé (leur ordre est 1 pour la plupart) mais des schémas dont le but est le calcul précis des discontinuités présentes dans les solutions des systèmes hyperboliques (chocs et discontinuités de contact). Cette problématique m'a été soumise lorsque j'ai effectué ma thèse au Commissariat à l'Énergie Atomique (Bruyères-le-Châtel), et j'ai continué à travailler sur ce sujet depuis, par le biais de contrats de recherche.

**Voici un rapide passage en revue (!)** de ces articles. Comme il existe une bijection canonique entre les articles et leurs résumés dans le présent mémoire, j'identifie systématiquement les articles à leurs résumés afin d'éviter de trop grandes périphrases.

Dans [a], nous extrayons d'un modèle de dynamique des fluides compressibles diphasiques (à une pression et deux vitesses) un système  $2 \times 2$  qui contient ce que l'on *peut* considérer comme l'essence des phénomènes diphasiques : la variable fraction massique d'une des phases ainsi que la variable différence des vitesses des deux phases. Nous effectuons une étude de ce système extrait, étude hors de portée sur le système complet.

[b] est une étude d'un système couplé Burgers-particule. C'est un couplage entre une loi de conservation scalaire (hyperbolique) et une équation différentielle, dans lequel apparaît un terme source non régulier (très singulier). Nous résolvons pour ce système le problème de Riemann. Avec un algorithme numérique, nous exhibons dans le cas de plusieurs particules un comportement intéressant et absent des autres modèles de couplage Burgers-particules : un phénomène de contact ou croisement de particules proche du « drafting-kissing-tumbling ». Ces résultats numériques se situent cependant hors du champ de l'analyse mathématique réalisée pour l'instant (puisque cette analyse n'a été faite que pour une particule).

Dans [c], nous nous intéressons au schéma upwind pour les équations de transport. Nous montrons qu'il est d'ordre  $1/2$  pour des données peu régulières, en dimension quelconque, sur des maillages généraux. Ce résultat n'est pas à proprement parler nouveau (il a été publié récemment par Benoît Merlet et Julien Vovelle) mais la méthode que nous utilisons est nouvelle : elle repose sur une interprétation probabiliste du schéma upwind (le définissant comme l'espérance d'un schéma aléatoire). L'ordre  $1/2$  peut alors être vu comme lié au théorème-limite central. C'est donc aussi une nouvelle manière d'expliquer la *diffusion numérique* : comme le résultat d'un processus stochastique.

L'article [d] est une étude du comportement en temps long des solutions numériques d'équations scalaires, linéaires ou non, obtenues par des algorithmes entropiques. J'y montre que dans le cas périodique la solution asymptotique en temps est une constante. La démonstration est basée sur des propriétés des produits infinis de matrices bistochastiques. Ce paragraphe a donc lui aussi un lien avec les probabilités et les chaînes de Markov.

[e] est une tentative de pallier le manque d'estimations sur la variation totale de la solution numérique d'une équation de transport en dimension quelconque sur des maillages généraux. Nous y avons proposé une généralisation de la forme incrémentale de Le Roux et Harten et une estimation de la variation totale *le long des courbes intégrales du champ de vitesse*.

Ceci constitue la fin du chapitre *Modélisation et analyse*.

Premier paragraphe du chapitre *Développement de méthodes numériques et calcul scientifique*, [f] est issu de ma thèse. Nous y proposons un formalisme nouveau pour exprimer la stabilité d'algorithmes dédiés au transport. Il a permis le développement d'algorithmes anti-dissipatifs. Je résume là le formalisme et l'algorithme en question car ils seront réutilisés dans la suite.

Par exemple à la page 25, où je résume une étude non publiée. Il s'agit du développement d'un algorithme cinétique anti-dissipatif pour les équations d'Euler. Les résultats numériques ne sont pas



satisfaisants, mais peut-être intéressants.

Un autre exemple d'utilisation de ce formalisme est dans [g], également extrait en partie de ma thèse. Nous y développons une méthode de résolution approchée (anti-dissipative) d'un système hyperbolique modélisant un fluide compressible à deux constituants. L'algorithme de transport est ici utilisé pour le calcul de l'évolution des fractions massiques des deux constituants (le caractère non diffusif de l'algorithme a donc pour effet de ne pas introduire de mélange artificiel des constituants).

[h], dont le résumé est placé dans le même paragraphe que [g], reprend aussi ce formalisme pour généraliser la méthode de [g] au cas d'un fluide à un nombre quelconque de constituants (étonnamment, ceci n'est pas *tout à fait* trivial).

Ensuite, dans [i], j'étudie les schémas de reconstruction pour les lois de conservation scalaires. Le schéma décentré aval sous contraintes amont de [f] n'est pas entropique, et le but est ici de développer des algorithmes anti-dissipatifs et entropiques. C'est fait dans [i] dans un autre formalisme, celui donc des schémas de reconstruction (le même type d'inégalités entropiques a été obtenu par François Bouchut dans le formalisme de [f]). J'y propose des conditions nouvelles et faibles de stabilité pour un opérateur de reconstruction (général).

Ces conditions sont utilisées dans [j] pour développer des schémas de *reconstruction discontinue* (ce qui est nouveau car les reconstructions sont traditionnellement utilisées pour obtenir des schémas d'ordre élevé, et sont donc habituellement des fonctions régulières).

Dans [k], nous avons utilisé ces reconstructions discontinues pour définir un algorithme conservatif, déterministe et « convergent » (*visiblement* convergent...) pour des solutions non classiques de lois de conservation à flux ni convexe ni concave.

[l] est une généralisation des reconstructions discontinues décrites dans [j] en dimension 2, pour le transport. Nous y développons un algorithme de transport anti-dissipatif sur des maillages généraux.

[m] utilise ce qui est développé dans [l] pour la dynamique des fluides compressibles à plusieurs constituants dans un cadre Arbitrary Lagrange Euler, ou, plus précisément, dans le cadre d'un algorithme lagrangien avec remaillage local éventuel. Le résultat est un algorithme peu coûteux anti-dissipatif.

Dans ce mémoire, je ne décrirai pas mes publications

- [n, o, p], écrites dans le cadre d'un groupe de travail sur le couplage d'équations aux dérivées partielles hyperboliques sous contrat avec le Commissariat à l'Énergie Atomique de Saclay ;
- [w, t, s], Notes aux Comptes Rendus de l'Académie de Sciences qui ont été développées dans des articles qui sont, eux, résumés ici ;
- [q, u, x, r], actes des CEMRACS (Centre d'Été de Mathématiques et de Recherche Avancée en Calcul Scientifique) 1999, 2003 et 2007.



# Chapitre 1

## Modélisation et analyse

### 1.1 Étude d'un modèle diphasique simplifié

Au cours de ma thèse j'ai étudié avec Bruno Després des modèles de mélanges de fluides compressibles (voir [v]). L'hypothèse essentielle que nous faisons était l'égalité (locale) de toutes les vitesses des constituants du fluide. Il existe dans ce cadre de nombreux modèles de mélanges qui conduisent à des systèmes inconditionnellement hyperboliques. Le défaut de ces modèles est de ne pas permettre l'étude de l'écoulement d'un liquide contenant de (petites) bulles ne se déplaçant pas à la vitesse du liquide (par exemple si elles ne sont pas soumises aux mêmes forces, par exemple donc dans un champ de gravité) : dans ce cas en effet un modèle moyenné (dans lequel les bulles n'apparaissent pas individuellement mais au travers d'une densité de présence, fraction massique ou volumique) doit prendre en compte la possibilité que les deux phases aient des vitesses différentes. Ces modèles multi-vitesses ne sont pas inconditionnellement hyperboliques (je parle des modèles à une seule pression ; des modèles à deux pressions et deux vitesses, (non strictement) hyperboliques, sont proposés et étudiés dans [4, 41, 82]). Il en existe de deux types : ceux qui sont hyperboliques seulement lorsque la différence des vitesses des deux constituants est supérieure à une fonction des inconnues qui ressemble à la vitesse du son du mélange : voir [80, 87]<sup>1</sup>, et ceux pour lesquels... C'est le contraire : ce sont par exemple les modèles de type *drift-flux*, où la différence des vitesses est donnée par une formule algébrique, c'est une fonction des autres inconnues (par exemple [6, 7]), ou bien encore les systèmes où cette différence des vitesses suit une loi de conservation (par exemple [46]). C'est dans ce dernier cadre que se situe l'étude que j'ai menée avec Bruno Després et David Ramos. Considérons le modèle (issu de [34])

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho c_2) + \partial_x(\rho c_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + P) = 0, \\ \partial_t w + \partial_x(wu + \mu_1 - \mu_2 - (c_1 - c_2)w^2/2) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho e + Pu + \rho w c_1 c_2(\mu_1 - \mu_2 - (c_1 - c_2)w^2/2)) = 0, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

La variable  $\rho$  y représente la densité globale du mélange,  $c_1 = 1 - c_2$  et  $c_2$  les fractions massiques de chacun des constituants,  $u_1 = w + u_2$  et  $u_2$  leurs vitesses,  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$  la vitesse (barycentrique) du mélange,  $e$  la densité d'énergie du mélange,  $P$  la pression *totale* du mélange (voir les relations de fermeture (1.2)),  $\mu_1$  et  $\mu_2$  des potentiels chimiques. Ce système doit être fermé par des relations supplémentaires qui permettent le calcul de la pression et des potentiels chimiques. On suppose données les lois d'état (pression, température et entropie) de chacun des constituants purs :  $p_1(\tau_1, \varepsilon_1)$ ,  $T_1(\tau_1, \varepsilon_1)$ ,  $S_1(\tau_1, \varepsilon_1)$ ,  $p_2(\tau_2, \varepsilon_2)$ ,  $T_2(\tau_2, \varepsilon_2)$ ,  $S_2(\tau_2, \varepsilon_2)$  où  $\tau_i$  et  $\varepsilon_i$  sont les volume spécifique et densité d'énergie interne du fluide

---

<sup>1</sup>Ces modèles sont en général obtenus par « moyennisation » d'un écoulement avec interface, il n'est donc pas étonnant que la condition d'hyperbolicité soit du même type que la condition de stabilité d'un écoulement de Kelvin-Helmholtz : écart des vitesses grand devant la vitesse du son (voir [84]).

$i$ , et l'on choisit comme relations de fermeture

$$\begin{cases} p_1(\tau_1, \varepsilon_1) = p_2(\tau_2, \varepsilon_2) = p, \\ T_1(\tau_1, \varepsilon_1) = T_2(\tau_2, \varepsilon_2) = T, \\ \rho = \frac{1}{c_1\tau_1 + c_2\tau_2}, \\ e = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + u^2/2 + c_1c_2w^2/2, \\ \mu_1 = -TS_1(\tau_1, \varepsilon_1) + \varepsilon_1 + p\tau_1 - kTc_2, \\ \mu_2 = -TS_2(\tau_2, \varepsilon_2) + \varepsilon_2 + p\tau_2 - kTc_1, \\ P = p + c_1c_2\rho w^2, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $k \geq 0$  est donné (les deux premières équations, qui imposent que la température et la pression des deux fluides soient égales, nous situent dans le contexte des *constrained mixtures* de Clifford Truesdell dans [92]). Ce système est hyperbolique sous la condition (suffisante, pas nécessaire)  $\sqrt{c_1c_2}|w| \leq c$  où  $c$  est la vitesse du son du mélange, voir [34] et [32].

Les variables de ce système qui sont à proprement parler des variables liées au caractère diphasique sont  $c_1$ ,  $c_2$  et  $w$ . Afin d'étudier le comportement de ces variables purement diphasiques, nous extrayons du système (1.1) les équations sur  $c_2$  et sur  $w$  et, pour les découpler des autres variables, nous supposons que  $\rho$  et  $T$  sont proches de constantes, que  $u$  est proche de 0, et ne gardons dans l'expression des potentiels chimiques dans (1.2) que la dépendance en  $c_i$  :  $\mu_1 = -kTc_2$ ,  $\mu_2 = -kTc_1$ . On note que  $u_2 = -w + u_1 = -w + (u - c_2u_2)/c_1$  donc que  $u_2 \approx -w - c_2u_2/c_1$ , soit  $u_2 \approx -c_1w$ . On obtient le système

$$\begin{cases} \partial_t c_2 - \partial_x (wc_1c_2) = 0, \\ \partial_t w + \partial_x (kT(c_1 - c_2) - (c_1 - c_2)w^2/2) = 0, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},$$

que nous étudions dans [a]. Après adimensionnement, en posant  $a = 2c_2 - 1$ ,  $b = w/\sqrt{2kT}$  et  $\bar{x} = \sqrt{2/(kT)}x$ , ce système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_t a + \partial_{\bar{x}} ((a^2 - 1)b) = 0, \\ \partial_t b + \partial_{\bar{x}} ((b^2 - 1)a) = 0, \end{cases} \quad (t, \bar{x}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Ce système est hyperbolique pour  $(a, b) \in [-1, 1]^2$ , strictement hyperbolique pour  $(a, b) \in ]-1, 1[^2$  (noter que  $c_2 \in [0, 1]$  si et seulement si  $a \in [-1, 1]$ ). Les champs associés aux deux valeurs propres (distinctes dans  $]-1, 1[^2$ )  $\lambda_{\pm} = 2ab \pm \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$  sont vraiment non linéaires sauf sur les droites  $b = -a$  (pour celui associé à la plus petite valeur propre,  $\lambda_-$ ) et  $b = a$  (pour celui associé à  $\lambda_+$ ). Ce système admet une entropie  $S(a, b) = -(1-a^2)(1-b^2)$  qui est strictement convexe dans

$$\{(a, b) \in ]-1, 1[^2 \text{ t.q. } (1-a^2)(1-b^2) > 4a^2b^2\},$$

qui est aussi le domaine où les valeurs propres sont de signe différent,  $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ . Ces résultats sont résumés sur la figure 1.1.

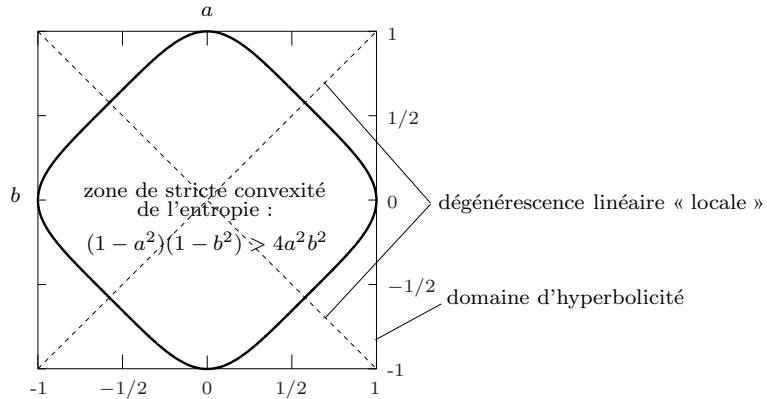


FIG. 1.1 – Domaines d'hyperbolicité et de convexité de l'entropie.

Une étude complète des courbes d'ondes, chocs et détente est faite dans [a] (avec leurs expressions exactes). Un point intéressant est que par  $(a, b) \in ]-1, 1]^2$  il passe une unique 1-détente et un unique 1-choc (associés à  $\lambda_-$ ), une unique 2-détente et un unique 2-choc (associés à  $\lambda_+$ ) et que ces courbes restent dans  $[-1, 1]^2$ , ce qui constitue un résultat de stabilité important : la zone d'hyperbolicité est une région invariante pour les ondes simples. L'étude de la stabilité de la zone d'hyperbolicité pour une donnée quelconque est plus délicate et nous ne l'avons effectuée que pour le système modifié

$$\begin{cases} \partial_t a + \partial_{\bar{x}}((a^2 - 1)b) = \varepsilon \partial_{\bar{x}, \bar{x}}^2 a - \alpha a, \\ \partial_t b + \partial_{\bar{x}}((b^2 - 1)a) = \varepsilon \partial_{\bar{x}, \bar{x}}^2 b - \alpha b, \end{cases} \quad (t, \bar{x}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

où  $\varepsilon, \alpha > 0$ . En utilisant des arguments classiques de régions invariantes (cf. [86]), nous montrons que pour une donnée initiale régulière dans  $[-1, 1]^2$  pour tout  $\bar{x}$ , le problème de Cauchy associé à (1.4) admet une unique solution (régulière) dans  $[-1, 1]^2$  pour tout  $(t, \bar{x})$ .

Par ailleurs, pour la résolution du problème sans viscosité ni relaxation (1.3), nous proposons un algorithme de relaxation à la Jin et Xin (voir [60]). Cet algorithme revient à résoudre avec le schéma upwind le système

$$\begin{cases} \partial_t a + \partial_{\bar{x}} \tilde{a} = 0, \\ \partial_t \tilde{a} + \lambda^2 \partial_{\bar{x}} a = ((a^2 - 1)b - \tilde{a}) / \varepsilon, \\ \partial_t b + \partial_{\bar{x}} \tilde{b} = 0, \\ \partial_t \tilde{b} + \lambda^2 \partial_{\bar{x}} b = ((b^2 - 1)a - \tilde{b}) / \varepsilon, \end{cases} \quad (t, \bar{x}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},$$

avec un splitting d'opérateurs pour les termes sources, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (par valeurs positives). Nous montrons que, sous la condition de Whitham<sup>2</sup>  $\lambda \geq 6$  et sous la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy  $6\Delta t / \Delta x \leq 1$ , le domaine d'hyperbolicité  $[-1, 1]^2$  est une région invariante pour le schéma.

## 1.2 Un modèle simple de couplage fluide-particule

Un phénomène connu de couplage fluide-structure est le « drafting-kissing-tumbling ». Il s'agit de l'interaction entre un fluide et deux solides soumis par exemple à la gravité. Si les solides sont plus denses que le fluide ils tombent, et s'ils sont suffisamment proches l'un de l'autre initialement l'un prend le sillage de l'autre, dont il se rapproche (drafting) jusqu'à le toucher (kissing) et le dépasser (tumbling), puis le phénomène se reproduit : voir [38] pour une description mécanique et, par exemple, [56, 57, 66] pour des simulations numériques. La mise en évidence théorique (mathématique) de ce phénomène en dimension 3 avec un modèle de fluide complet de type Euler ou Navier-Stokes, compressible ou non, est hors de portée. Aussi l'on peut se demander s'il existe un modèle simple (au besoin très simple) de couplage fluide-structure qui permet de prévoir ce genre de comportement. Première simplification : on se place dans un cadre mono-dimensionnel. Cette hypothèse peut sembler contradictoire avec le phénomène que l'on veut observer, car le tumbling est impossible sur un axe (la dimension 2 au minimum paraît nécessaire), cependant on est prêt à supposer (ici!) que les solides ne se « voient » pas directement et peuvent se traverser. Seconde simplification : on choisit l'équation de Burgers pour modèle fluide. Troisième simplification : les solides (au nombre de  $n$ ) sont ponctuels (ce sont des particules). Le modèle de couplage Burgers (visqueux)-particules suivant a été étudié dans [53, 93, 94].

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = \mu \partial_{x,x}^2 u, & (t, x) \in \{(s, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ t.q. } y \neq h_i(s), i = 1, \dots, n\}, \\ u(t, h_i(t)) = h_i'(t), & t \in \mathbb{R}_+^*, i = 1, \dots, n, \\ m h_i''(t) = [\partial_x u(t, h_i(t))], & t \in \mathbb{R}_+^*, i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

avec données initiales  $u(0, x) = u^0(x)$ ,  $h_i(0) = h_i^0$  et  $h_i'(0) = v_i^0$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Le paramètre  $\mu$ , « viscosité », est strictement positif. Le paramètre  $m$ , masse de chaque particule, l'est aussi. Le crochet  $[\partial_x u(t, x)]$  désigne le saut spatial  $\partial_x u(t, x_+) - \partial_x u(t, x_-)$ , où  $\partial_x u(t, x_+)$  et  $\partial_x u(t, x_-)$  sont respectivement les traces (en espace) de  $\partial_x u(t, \cdot)$  à droite de  $x$  et à gauche de  $x$ . Ce problème est bien posé (voir [93]). Il

<sup>2</sup>La condition de Whitham optimale serait  $\lambda > 2$  puisque dans la zone d'hyperbolicité  $[-1, 1]^2$ , la valeur absolue maximale des valeurs propres est 2. Pour des raisons sans doute uniquement techniques, nous ne sommes pas parvenus à obtenir le résultat sous cette hypothèse moins restrictive.

est démontré dans [94] et [53] que les particules n'entrent jamais en collision, c'est-à-dire que pour  $j \neq i$ ,  $h_i(t) \neq h_j(t)$  pour tout  $t$  (si cela est le cas à  $t = 0$ ), c'est d'ailleurs le titre de [94]. Autrement dit, le drafting-kissing-tumbling n'est pas prévu par ce modèle.

Avec Nicolas Seguin et Takéo Takahashi, nous avons opté pour un modèle de couplage différent. Outre que nous considérons l'équation de Burgers non visqueuse pour le fluide (ceci n'a vraisemblablement pas d'influence sur la possibilité de collisions de deux particules), nous avons choisi d'exprimer l'interaction entre une particule et le fluide *via* un terme de relaxation (de traînée) entre la vitesse  $h'(t)$  de la particule à la position  $h(t)$  et la vitesse locale du fluide  $u(t, h(t))$ . L'étude que nous avons faite, consignée dans [b], concerne un système à une seule particule<sup>3</sup> :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) (t, x) = \lambda(h'(t) - u(t, h(t)))\delta_{h(t)}(x), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ mh''(t) = -\lambda(h'(t) - u(t, h(t))), & t \in \mathbb{R}_+^*, \end{cases}$$

avec données initiales  $u(0, x) = u^0(x)$ ,  $h(0) = h^0$  et  $h'(0) = v^0$ . Dans ce système,  $\delta_{h(t)}$  désigne la masse de Dirac unité en espace au point  $h(t)$ . Le paramètre  $\lambda$ , qui est l'inverse du temps caractéristique de relaxation d'une vitesse vers l'autre, est strictement positif. Le paramètre  $m$  est la masse de la particule. Ce modèle peut être obtenu en dégradant un modèle de couplage entre les équations d'Euler isentropiques et une densité de particules (modèle cinétique) étudié dans [5] (voir aussi [16] pour un système semblable, avec un terme de diffusion dans l'équation cinétique).

La difficulté dans ce modèle provient du fait qu'en l'absence de terme visqueux dans l'équation de Burgers, on doit s'attendre à ce que la solution  $u$  ne soit pas régulière. Et alors le terme  $u\delta$  n'a pas de sens *a priori*. D'autre part,  $u$  n'ayant encore une fois aucune raison d'être régulière, l'équation différentielle ordinaire régissant le déplacement de la particule elle-même est à comprendre en un sens faible :  $mh''(t) \in -\lambda(h'(t) - u(t, h(t)))$ .

Dans [b] nous montrons que tout problème de Riemann avec position initiale de la particule sur le lieu de discontinuité de  $u^0$  :

$$\begin{aligned} u^0(x) &= \begin{cases} u_L \in \mathbb{R} & \text{si } x < 0, \\ u_R \in \mathbb{R} & \text{si } x > 0, \end{cases} \\ h^0 &= 0, \\ v^0 &\in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

admet une solution entropique. Pour cela nous procédons en quatre étapes.

La première étape est la dérivation formelle des inégalités entropiques à la Kružkov

$$\partial_t |u - \kappa| + \partial_x \left( \operatorname{sgn}(u - \kappa) \frac{u^2 - \kappa^2}{2} \right) + m |h' - \kappa|' \delta_h \leq 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{R}.$$

La deuxième étape concerne la définition du produit non conservatif  $u(t, h(t))\delta_{h(t)}$ . Comme dans [44, 58], cette définition est obtenue en régularisant la particule, c'est-à-dire en remplaçant la masse de Dirac dans l'équation par une fonction positive ou nulle régulière à support compact et d'intégrale unité : on note  $p$  l'approximation de  $\delta_0$ . On cherche alors les solutions ondes progressives à vitesse  $v$  de l'équation (découplée)

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = \lambda(v - u)p(\cdot - vt), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},$$

obtenue en remplaçant l'inconnue  $h'$  par une vitesse connue constante  $v$ . Cela nous permet de comprendre l'effet de la particule sur le fluide : en d'autres termes, de caractériser le saut de  $u$  à travers la particule. Un point crucial est que ce saut ne dépend pas de la fonction  $p$  approximation de la masse de Dirac, il est donc intrinsèque. Munis de ce qui peut être vu comme une définition du produit  $u\delta$ , nous passons à la troisième étape, la résolution du problème de Riemann pour l'équation découplée

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = \lambda(v - u)\delta_{vt}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

---

<sup>3</sup>Inutile donc pour l'instant d'espérer une mise en évidence mathématique du drafting-kissing-tumbling ! Cependant les résultats numériques que je présente à la fin de ce paragraphe sont encourageants dans cette direction.

(la vitesse de la particule est ici toujours fixée,  $v$ , sa position à l'instant  $t$  est donc  $vt$  puisque sa position initiale est 0). Cette étape est une résolution classique de problème de Riemann et consiste à « recoller » trois ondes :

- une onde de l'équation de Burgers (correspondant au milieu libre à gauche de la particule) liant  $u_L$  à  $u_-$  qui est la trace de  $u$  à gauche de la particule en  $x = vt$  ;
- une onde, admissible au sens de la définition des sauts à travers la particule (définition trouvée lors de la deuxième étape) liant  $u_-$  à  $u_+$  qui est la trace de  $u$  à droite de la particule en  $x = vt$  ;
- une onde de l'équation de Burgers (correspondant au milieu libre à droite de la particule) liant  $u_+$  à  $u_R$ .

Nous montrons qu'il y a existence et unicité de solution à ce problème auto-semblable.

La dernière étape concerne le problème couplé. La difficulté tient (encore) à la présence du terme source dans l'équation de Burgers. Celui-ci est responsable du fait que la solution n'est pas auto-semblable, et ceci nous prive (pour l'instant) d'une démonstration de l'unicité<sup>4</sup>. Pour trouver une solution entropique au problème, nous commençons par montrer le résultat original suivant. On y note  $u_-(t)$  et  $u_+(t)$  les traces (spatiales) de  $u$  à gauche et à droite de  $h(t)$ , au temps  $t$ . Supposons que  $(u_-(t), u_+(t))$  est une discontinuité admissible (au sens de la définition des sauts à travers la particule trouvée lors de la deuxième étape). Alors

$$\begin{cases} \partial_t |u - \kappa| + \partial_x \left( \operatorname{sgn}(u - \kappa) \frac{u^2 - \kappa^2}{2} \right) + m |h' - \kappa|' \delta_h \leq 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{R}, \\ mh'' \in \lambda(u(t, h) - h'), & t \in \mathbb{R}_+^*, \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} \partial_t |u - \kappa| + \partial_x \left( \operatorname{sgn}(u - \kappa) \frac{u^2 - \kappa^2}{2} \right) \leq 0, \\ (t, x) \in \{(s, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ t.q. } y \neq h(s)\}, \kappa \in \mathbb{R}, \\ mh'' = (u_-(t) - u_+(t)) \left( \frac{u_-(t) + u_+(t)}{2} - h' \right), & t \in \mathbb{R}_+^*, \end{cases}$$

c'est-à-dire le système des inégalités de Kružkov à gauche de la particule et à droite de la particule, et une équation différentielle ordinaire classique pour la position de la particule<sup>5</sup>. Donc les inégalités d'entropie permettent de donner un sens précis à l'équation différentielle au sens de Carathéodory  $mh'' \in \lambda(u(t, h) - h'), t \in \mathbb{R}_+^*$ . Cela nous permet de résoudre le problème couplé<sup>6</sup>.

La suite que nous voulons donner à ce travail est l'étude de l'unicité de solution pour le problème de Riemann, puis de l'existence et de l'unicité pour le problème de Cauchy. Nous comptons aussi nous intéresser au cas de plusieurs particules. Pour ce dernier problème, nous avons écrit un algorithme de résolution approchée, basé sur les solutions exactes du problème de Riemann. On se donne un maillage régulier de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} [j\Delta x, (j+1)\Delta x[$  avec  $\Delta x > 0$  et on cherche une solution approchant  $u$ , qui soit constante par maille. L'algorithme, de volumes finis, consiste en la résolution de problèmes de Riemann en chaque  $j\Delta x$  pour un temps  $\Delta t$  petit (vérifiant une condition de Courant-Friedrichs-Lewy) puis à remplacer dans chaque intervalle  $[j\Delta x, (j+1)\Delta x[$  la solution obtenue par une constante. Pour n'avoir à résoudre que des problèmes de Riemann aux interfaces, il faut que les particules soient à chaque pas de temps situées sur des interfaces (et non à l'intérieur des mailles). Cela suggère d'utiliser un algorithme de type Glimm : après avoir calculé la position théorique<sup>7</sup>  $h$  d'une particule (dans la maille  $[j\Delta x, (j+1)\Delta x[$ ), nous choisissons « au hasard »<sup>8</sup> un réel  $r$  dans l'intervalle  $[j\Delta x, (j+1)\Delta x[$ . Si  $r \leq h$ , la particule est

<sup>4</sup>Beaucoup de résultats d'unicité de solution à des problèmes de Riemann sont en fait des résultats d'unicité de solution auto-semblable. Le résultat d'existence que nous avons est constructif : nous donnons une solution.

<sup>5</sup>Il est amusant que le paramètre  $\lambda$  n'apparaisse pas explicitement dans l'équation différentielle. Je suis quasiment certain de n'avoir pas placé de coquille dans ce système ! En réalité  $(u_-(t) - u_+(t))$  dépend de manière cachée de  $\lambda$  puisque l'on a requis (pour l'équivalence) que  $(u_-(t), u_+(t))$  soit une discontinuité admissible (et la caractérisation des sauts admissibles à travers la particule fait intervenir la valeur de  $\lambda$ ). Cependant, en général,  $(u_-(t) - u_+(t)) \neq \lambda$ , donc le sens de  $mh'' = \lambda(u - h')$  n'est pas  $mh'' = \lambda(\bar{u} - h')$  avec  $\bar{u} = (u_- + u_+)/2$ .

<sup>6</sup>Encore une fois, cette résolution n'est pas triviale : l'absence de caractère auto-semblable permet par exemple des interactions en nombre arbitraire entre la particule et des chocs d'amplitudes différentes au cours du temps.

<sup>7</sup>À vrai dire, par manque de courage, nous avons effectué une résolution approchée de l'équation différentielle qui régit le déplacement de la particule, à chaque pas de temps.

<sup>8</sup>Aléatoirement selon la loi uniforme. Ou selon un algorithme déterministe permettant de définir une suite (de réels  $r_n$ ) à discrétion faible (algorithme de Van der Corput par exemple).

déplacée en  $(j + 1)\Delta x$ , sinon elle est déplacée en  $j\Delta x$ . L'algorithme choisi pour calculer l'approximation de  $u$  est aussi celui de Glimm (voir [42] pour l'article original, et aussi [55, 83]). Pour traiter le cas de plusieurs particules, un splitting a été effectué : dans le cas où deux particules se trouvent en la même interface  $j\Delta x$ , l'algorithme est utilisé deux fois : une première fois avec une particule, en ignorant l'autre, une seconde fois avec l'autre particule, en ignorant la première. On note que les particules ne se voient pas, elle peuvent se traverser<sup>9</sup>.

La convergence de l'algorithme a été vérifiée expérimentalement pour des problèmes de Riemann à une particule. Voici un résultat numérique obtenu avec deux particules. Il met en évidence ce que l'on peut appeler (en exagérant un peu!) du drafting-kissing-tumbling. On considère ici un « fluide » initialement au repos :  $u^0 = 0$  et deux particules de masses  $m_1 = m_2 = 1$ . Leurs positions initiales respectives sont  $h_1^0 = 0,05$ ,  $h_2^0 = 0,06$ , et leurs vitesses initiales  $v_1^0 = 0,01$ ,  $v_2^0 = 0$ . Le paramètre de friction  $\lambda$  vaut 1. Le calcul est effectué avec 1000 mailles sur le segment  $[0, 1]$ , le nombre de Courant<sup>10</sup> est 1, le temps final est 20. La figure 1.2 montre que les particules oscillent l'une autour de l'autre au cours du temps. La figure 1.3 présente un zoom de la précédente autour du temps final. On y constate que les oscillations persistent en temps long.

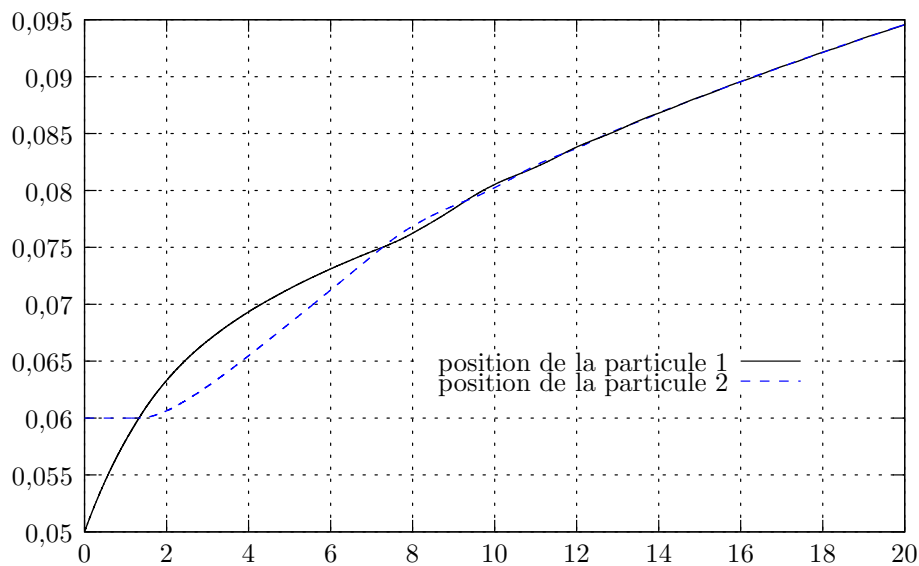


FIG. 1.2 – Position des deux particules en fonction du temps.

<sup>9</sup>À une renumérotation des particules près, ceci est équivalent à supposer que lorsque deux particules entrent en collision, il y a un carreau parfait : elles échangent leurs vitesses.

<sup>10</sup>Le nombre de Courant à l'étape en temps  $n$  est  $\max(\max_j |u_j^n|, |h'^n|) \Delta t / \Delta x$ , où  $u_j^n$  est l'approximation de  $u$  au temps  $t^n$  dans la maille  $[j\Delta x, (j + 1)\Delta x[$  et  $h'^n$  est l'approximation de  $h'(t^n)$ .



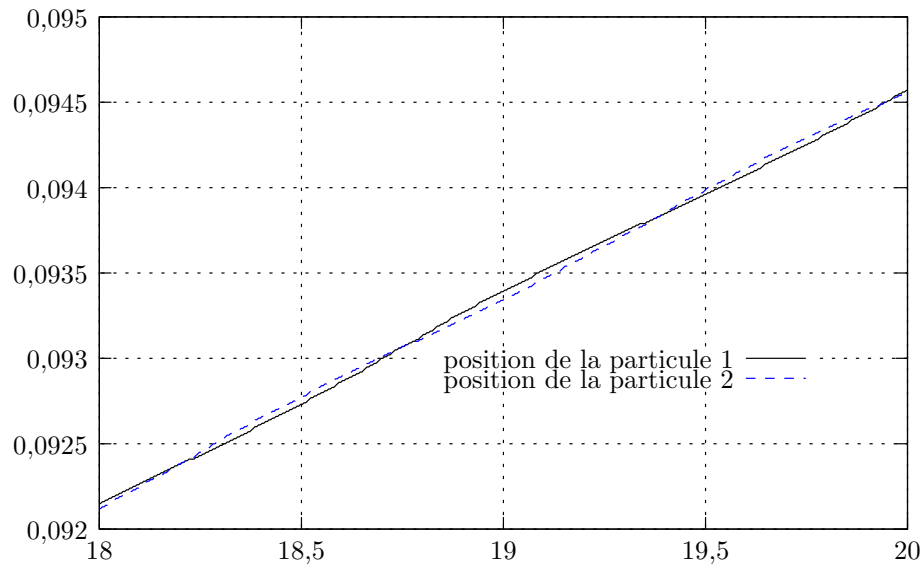


FIG. 1.3 – Position des deux particules en fonction du temps.

### 1.3 Qu'est-ce que la diffusion numérique ? Et : ses relations avec l'ordre de convergence.

Dans ce paragraphe, je m'intéresse au phénomène de *diffusion numérique* qui s'observe lors de la résolution approchée (par les méthodes de volumes finis ou différences finies) d'équations hyperboliques (typiquement, de type transport instationnaire).

La diffusion numérique est un phénomène qui accompagne la plupart des schémas numériques stables, au moins ceux qui sont d'ordre 1 (lire néanmoins la suite de ce mémoire pour des contre-exemples!). Cependant, pour l'expliquer et l'analyser, on prend le parti ici de ne considérer que le schéma *upwind* (décentré amont), dont les propriétés sont suffisamment génériques.

À la question posée dans l'intitulé de cette section, on peut proposer des réponses à différents degrés de rigueur (j'en propose trois ci-dessous).

Au degré zéro (on ne peut donc ici parler de rigueur), il s'agit de *constater* sur les résultats numériques procurés par le schéma upwind qu'ils sont victimes d'un artefact ressemblant à l'action d'une diffusion.

Considérons l'équation de transport à vitesse  $a > 0$  constante,

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

avec une donnée initiale  $u^0 = \mathbb{1}_{[1/5, 2/5]}$ . Une méthode classique de résolution numérique est proposée par le schéma upwind. Pour un pas de temps  $\Delta t > 0$  et un pas d'espace  $\Delta x > 0$  donnés vérifiant la condition de Courant-Friedrichs-Lewy  $a\Delta t/\Delta x \leq 1$ , il consiste en le calcul des  $u_j^n$  avec

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad (1.6)$$

et<sup>11</sup>  $u_j^0 = \int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} u^0(x) dx / \Delta x$ . La figure 1.4, sur laquelle on compare la solution et la solution numérique ( $a = 1$ ,  $t = 0,4$ , 50 mailles sur le segment  $[0, 1]$ ,  $a\Delta t/\Delta x = 0,7$ ), montre bien l'artefact de diffusion numérique.

<sup>11</sup>On adopte ici une vision plus « volumes finis » que « différences finies ».

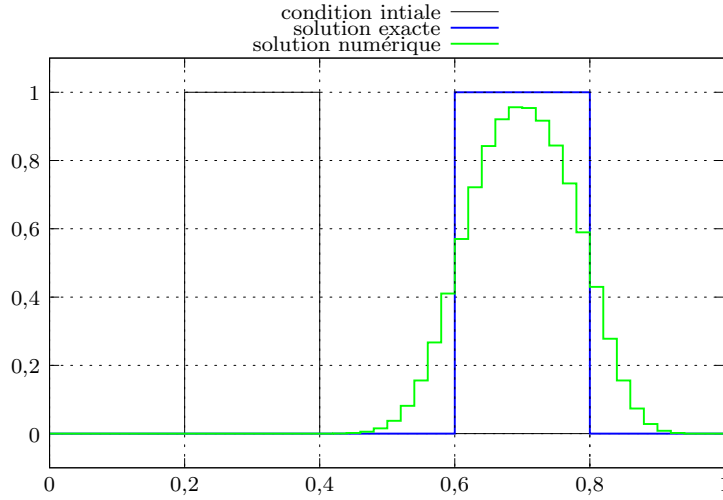


FIG. 1.4 – Condition initiale, solutions exacte et numérique avec  $a\Delta t/\Delta x = 0,7$ .

Afin d'expliquer ce comportement diffusif de la solution, on peut faire une très simple analyse de la consistance du schéma<sup>12</sup>. Le schéma upwind est consistant à l'ordre 1 en temps et en espace avec l'équation (1.5) pour une donnée initiale de classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  à dérivée seconde uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  ( $C = \max(a, a^2)\|u^{0''}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}/2$  convient) telle que, pour tout  $(n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ ,

$$\left| \frac{u((n+1)\Delta t, j\Delta x) - u(n\Delta t, j\Delta x)}{\Delta t} + a \frac{u(n\Delta t, j\Delta x) - u(n\Delta t, (j-1)\Delta x)}{\Delta x} \right| \leq C(\Delta t + \Delta x).$$

Et l'on peut montrer que ce même schéma est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace avec l'équation de transport-diffusion

$$\partial_t v + a\partial_x v = \frac{a(\Delta x - a\Delta t)}{2} \partial_{x,x}^2 v, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante  $D \in \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $(n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ ,

$$\left| \frac{v((n+1)\Delta t, j\Delta x) - v(n\Delta t, j\Delta x)}{\Delta t} + a \frac{v(n\Delta t, j\Delta x) - v(n\Delta t, (j-1)\Delta x)}{\Delta x} \right| \leq D(\Delta t^2 + \Delta x^2),$$

si  $v$  est solution de (1.7) avec  $v(0, \cdot) = u^0$  si  $u^0$  est de classe  $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$  à dérivée troisième uniformément bornée. On note que la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy est ici perceptible (c'est la condition sous laquelle le coefficient de diffusion équivalent du schéma est positif). On remarque aussi que lorsque le nombre de Courant,  $a\Delta t/\Delta x$ , vaut 1, le coefficient de diffusion est nul : d'ailleurs, on vérifie sans peine que le schéma est dans ce cas exact. La figure 1.5 rend compte de cet ordre de consistance meilleur avec l'équation de transport diffusion. On y compare la solution numérique et la solution exacte du problème (1.7) avec la même donnée initiale<sup>13</sup>.

<sup>12</sup>Consistance au sens des différences finies.

<sup>13</sup>En fait il ne s'agit pas exactement de la solution exacte. Cette solution exacte vaut

$v(t, x) = 1/\sqrt{2a(\Delta x - a\Delta t)\pi t} \int_{\mathbb{R}} u^0(x - at - y) e^{-\frac{y^2}{2a(\Delta x - a\Delta t)t}} dy$ , et la solution représentée sur la figure est une approximation de cette fonction obtenue par une méthode des trapèzes sur un maillage de 5000 points sur  $[0, 1]$ .

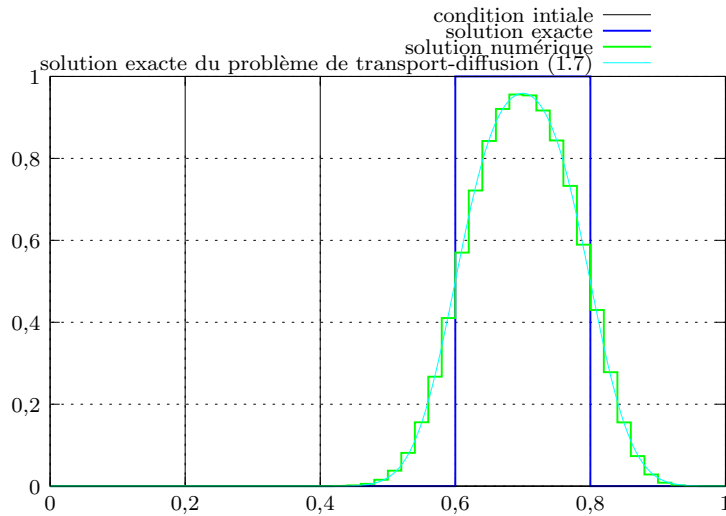


FIG. 1.5 – Condition initiale, solutions exacte et numérique et solution exacte du problème de transport-diffusion équivalent (mêmes paramètres que pour la figure 1.4).

Cette explication du comportement diffusif du schéma n'est satisfaisante que dans le cas traité ici : vitesse constante et, surtout, dimension 1 et maillage régulier. En effet,

- en dimension 1 sur un maillage quelconque, le coefficient de diffusion équivalent dépend de la maille considérée et l'équation équivalente à l'ordre 2 dépend fortement du maillage choisi ;
- en dimension supérieure à 1, sur maillage quelconque, **le schéma upwind n'est pas consistant avec l'équation de transport qu'il est censé résoudre de manière approchée**<sup>14</sup>.

Une autre manière de justifier le terme de diffusion numérique est d'interpréter le schéma upwind comme *l'espérance d'un schéma aléatoire*<sup>15</sup>. C'est ce que nous proposons, avec François Delarue, dans [c]. Nous allons voir que le schéma upwind est l'espérance d'un schéma qui résout le problème de transport « plus » une petite perturbation aléatoire à chaque pas de temps (penser à un brownien, processus de diffusion) dont le résultat après de nombreux pas de temps est équivalent à une diffusion. Cette interprétation du schéma upwind permet de comprendre la diffusion numérique comme résultant d'un processus stochastique diffusif. Elle fait appel au théorème-limite central ou à des inégalités de martingale. Considérons encore, pour simplifier, le cas du transport à vitesse constante positive en dimension 1, discrétisé sur un maillage uniforme. Une réécriture de (1.6) est

$$u_j^{n+1} = u_j^n \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + u_{j-1}^n \left(a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right), \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},$$

qui exprime  $u_j^{n+1}$  comme une combinaison convexe de  $u_j^n$  et de  $u_{j-1}^n$  (sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy). C'est donc une *moyenne* de  $u_j^n$  et de  $u_{j-1}^n$ , plus précisément c'est l'espérance de la variable aléatoire qui prend la valeur  $u_j^n$  avec la probabilité  $1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}$  et la valeur  $u_{j-1}^n$  avec la probabilité<sup>16</sup>  $a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ . Nous allons préciser cette idée en définissant une caractéristique aléatoire associée au schéma upwind. Définissons les caractéristiques (rétrogrades) exactes par  $X(t, x) = x - at$  ; la solution de l'équation est alors donnée par

$$u(t, x) = u^0(X(t, x)), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

Nous définissons maintenant des caractéristiques discrètes aléatoires. Soit la suite aléatoire d'indices

<sup>14</sup>En dimension quelconque sur maillage cartésien, la même analyse de consistance que ci-dessus peut cependant être menée.

<sup>15</sup>Ceci n'en fait pas un schéma aléatoire !

<sup>16</sup>Notons au passage que la condition de Courant-Friedrichs-Lewy est ici une condition nécessaire et suffisante pour que  $a\Delta t/\Delta x$  soit bien une probabilité.

$(i_j^n)_{(n,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}}$  donnée par

$$i_j^0 = j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$i_j^{n+1} = \begin{cases} i_j^n & \text{avec probabilité } 1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \\ i_j^n - 1 & \text{avec probabilité } a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \end{cases} \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$$

La caractéristique aléatoire  $X_j^n$  est alors définie par

$$X_j^n = (i_j^n + 1) \Delta x,$$

c'est-à-dire que  $X_j^n$  est le bord droit de la maille  $[i_j^n \Delta x, (i_j^n + 1) \Delta x[$  d'indice  $i_j^n$ . Dans ce cas simplifié où la vitesse est constante et le maillage est uniforme, la position de  $X_j^n$  dans la maille d'indice  $i_j^n$  importe peu, mais dans le cas général il est préférable de choisir le point extrémal du côté *aval* de la maille. Ceci est lié à une propriété de consistance (au sens des différences finies) du schéma : l'analyse classique de la convergence du schéma upwind pour des données régulières utilise aussi ces points-ci (voir [37], voir aussi [11] pour une analyse de consistance en dimension supérieure). En dimension supérieure à 1, il est primordial (en tout cas pour la *compréhension* du problème) de choisir convenablement le point dans la maille, et c'est une des difficultés supplémentaires ; je n'aborderai pas ce point dans le mémoire. L'analyse que nous proposons de l'ordre du schéma upwind repose sur les deux propriétés suivantes.

1) Le schéma upwind est mis en relation avec la suite aléatoire  $(i_j^n)$  de manière simple : par définition du schéma et de la suite,  $u_j^{n+1} = \mathbb{E} \left( u_{i_j^n}^n \right)$  (si  $X$  est une variable aléatoire,  $\mathbb{E}(X)$  désigne l'espérance de  $X$ ) et, par récurrence, on a

$$u_j^n = \mathbb{E} \left( u_{i_j^n}^0 \right), \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$$

Ceci exprime que la valeur  $u_j^n$  est l'espérance de  $u^0$  au pied de la caractéristique aléatoire.

2) La caractéristique aléatoire se déplace en moyenne à la bonne vitesse,  $-a$  : trivialement encore,

$$\mathbb{E} (X_j^{n+1} - X_j^n) = -a \Delta t, \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$$

Supposons maintenant que  $u^0$  est lipschitzienne (de module  $L$ ) et que  $u_j^0 = u^0((j+1)\Delta x)$  (c'est-à-dire que l'on prend pour donnée initiale discrète une valeur ponctuelle et non une moyenne locale de la donnée initiale  $u^0$ , ce qui ne change pas grand'chose). Alors

$$u_j^n = \mathbb{E} \left( u_{i_j^n}^0 \right) = \mathbb{E} \left( u^0(X_j^n) \right) = \mathbb{E} \left( u^0 \left( X_j^0 + \sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k) \right) \right), \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$$

Or  $(X_j^{k+1} - X_j^k)_k$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance  $-a \Delta t$  et de variance

$$\mathbb{E} \left( (X_j^{k+1} - X_j^k + a \Delta t)^2 \right) = (a \Delta t)^2 \times \left( 1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + (-\Delta x + a \Delta t)^2 \times a \frac{\Delta t}{\Delta x} = a \Delta t (\Delta x - a \Delta t).$$

En conséquence, d'après le théorème-limite central (cf. [59]),

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k) + na \Delta t}{(na \Delta t (\Delta x - a \Delta t))^{1/2}} \Longrightarrow_{n \rightarrow +\infty} G, \quad j \in \mathbb{Z},$$

où  $\Longrightarrow_{n \rightarrow +\infty}$  signifie « converge en loi, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , vers », et  $G$  est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, c'est-à-dire une variable aléatoire réelle de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue)  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Cela signifie (voir encore [59]) que

$$\mathbb{E} \left( f \left( \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k) + na \Delta t}{(na \Delta t (\Delta x - a \Delta t))^{1/2}} \right) \right) \longrightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} (f(G)), \quad j \in \mathbb{Z},$$

quelle que soit  $f$  fonction continue bornée (de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ). Pour  $n$  assez grand, on a donc, quel que soit  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathbb{E} \left( f \left( \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k) + na\Delta t}{(na\Delta t (\Delta x - a\Delta t))^{1/2}} \right) \right) \approx \mathbb{E} (f(G))$$

et en prenant pour « fonction-test<sup>17</sup> »

$$f(x) = u^0 \left( (na\Delta t (\Delta x - a\Delta t))^{1/2} x + X_j^0 - na\Delta t \right)$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} u_j^n &= \mathbb{E} \left( u^0 \left( X_j^0 + \sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k) \right) \right) \\ &\approx \mathbb{E} \left( u^0 \left( X_j^0 - na\Delta t + (na\Delta t (\Delta x - a\Delta t))^{1/2} G \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi na\Delta t (\Delta x - a\Delta t)}} \int_{\mathbb{R}} u^0 (X_j^0 - na\Delta t - y) e^{\frac{-y^2}{2na\Delta t (\Delta x - a\Delta t)}} dy \end{aligned}$$

car la densité de la variable aléatoire  $X_j^0 - na\Delta t + (na\Delta t (\Delta x - a\Delta t))^{1/2} G$  est

$$\frac{e^{\frac{-(x - X_j^0 + na\Delta t)^2}{2na\Delta t (\Delta x - a\Delta t)}}}{\sqrt{2\pi na\Delta t (\Delta x - a\Delta t)}}.$$

Pour finir on se rappelle que  $X_j^0 = (j+1)\Delta x$  et que  $u(n\Delta t, (j+1)\Delta x) = u^0((j+1)\Delta x - na\Delta t)$ , donc, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $n$  assez grand,

$$u_j^n \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi na\Delta t (\Delta x - a\Delta t)}} \int_{\mathbb{R}} u(n\Delta t, (j+1)\Delta x - y) e^{\frac{-y^2}{2na\Delta t (\Delta x - a\Delta t)}} dy.$$

On en déduit (un peu vite) que  $u_j^n$  est proche de la solution exacte au temps  $n\Delta t$  au point  $(j+1)\Delta x$  convoluée par une gaussienne d'écart-type

$$\sqrt{na\Delta t (\Delta x - a\Delta t)},$$

ce qui donne une erreur proche de  $\sqrt{at(\Delta x - a\Delta t)}$  pour  $t = n\Delta t$ . On remarque que la formule de convolution obtenue est exactement celle qui donne la solution du problème de diffusion (1.7) au temps  $n\Delta t$ . Pour rendre cette approche rigoureuse il faudrait donner un sens au signe  $\approx$  ci-dessus. Ceci peut être fait au moyen du théorème de Berry-Esseen (voir [79]), qui donne une estimation précise de la vitesse de convergence dans le théorème-limite central. C'est effectué dans [c], où l'on montre une estimation d'erreur (uniforme en temps) d'ordre 1 entre la solution numérique et la solution exacte de l'équation d'advection-diffusion (1.7). Nous n'avons toutefois démontré ce résultat précis que dans le cas simplifié d'un maillage uniforme en dimension 1 avec vitesse de transport constante. L'analyse moins fine (sans utiliser le théorème de Berry-Esseen) qui « passe » dans le cas général (dimension quelconque, maillage quelconque, vitesse de transport quelconque) est la suivante. Pour tout  $(n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  on a

$$\begin{aligned} |u_j^n - u(n\Delta t, (j+1)\Delta x)| &= |\mathbb{E}(u^0(X_j^n)) - u^0((j+1)\Delta x - na\Delta t)| \\ &= |\mathbb{E}(u^0(X_j^n) - u^0((j+1)\Delta x - na\Delta t))| \leq L \mathbb{E} |X_j^n - ((j+1)\Delta x - na\Delta t)| \end{aligned}$$

( $u^0$  étant lipschitzienne de module  $L$ ). Pour avoir une estimation de l'erreur il suffit donc d'estimer la différence entre la caractéristique exacte et l'aléatoire. On a

$$\mathbb{E} |X_j^n - ((j+1)\Delta x - na\Delta t)| = \mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) \right|.$$

<sup>17</sup>C'est un manque de rigueur caractérisé car cette fonction-test dépend de  $n$ .

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (l'espérance est une intégrale sur un segment de longueur 1)

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) \right| \leq \left( \mathbb{E} \left( \left( \sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) \right)^2 \right) \right)^{1/2}.$$

En développant le membre de droite ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) \right| \\ & \leq \left( \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t)^2 + 2 \sum_{\substack{k,l=0, \\ k < l}}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) (X_j^{l+1} - X_j^l + a\Delta t) \right) \right)^{1/2} \\ & = \left( \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t)^2 \right) + 2 \sum_{\substack{k,l=0 \\ k < l}}^{n-1} \mathbb{E} \left( (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) (X_j^{l+1} - X_j^l + a\Delta t) \right) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Intéressons-nous aux termes dans la seconde somme de la dernière ligne ci-dessus. On a, pour  $k < l$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) (X_j^{l+1} - X_j^l + a\Delta t) \right) \\ & = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left( (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) (X_j^{l+1} - X_j^l + a\Delta t) \mid X_j^l \right) \right] \\ & = \mathbb{E} \left[ (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) \mathbb{E} \left( (X_j^{l+1} - X_j^l + a\Delta t) \mid X_j^l \right) \right] \end{aligned}$$

où  $\mathbb{E}(X|Y)$  désigne l'espérance de  $X$  sachant  $Y$  ( $X$  et  $Y$  étant deux variables aléatoires). Le passage de la première ligne à la deuxième est une conséquence du théorème de Fubini, le passage de la deuxième à la troisième vient du fait que puisque  $k < l$ ,  $X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t$  est connu à l'étape  $l$ <sup>18</sup>. Puisque  $\mathbb{E} \left( (X_j^{l+1} - X_j^l + a\Delta t) \mid X_j^l \right) = 0$  (la caractéristique aléatoire se déplace en moyenne à la bonne vitesse; en termes probabilistes,  $(X_j^n + na\Delta t)_n$  est une martingale), l'espérance du produit ci-dessus est nulle. On en déduit que

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) \right| \leq \left( \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left( (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t)^2 \right) \right)^{1/2}, \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$$

Chaque espérance dans le membre de droite n'est autre que la variance, déjà calculée, de la suite  $(X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t)_k$ . On a en définitive

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) \right| \leq \sqrt{na\Delta t (\Delta x - a\Delta t)}$$

et cela donne

$$|u_j^n - u(n\Delta t, (j+1)\Delta x)| \leq L\sqrt{na\Delta t (\Delta x - a\Delta t)}, \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$$

Dans [c], nous généralisons cette approche pour obtenir les résultats suivants (qui sont déjà essentiellement présents dans les articles de Benoît Merlet, et Benoît Merlet et Julien Vovelle, [73] et [74], où les techniques

<sup>18</sup>En fait dans le cas présent on peut aller plus vite et remarquer que  $(X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t)_k$  est une suite de variables aléatoires *indépendantes*, donc  $\mathbb{E} \left( (X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t) (X_j^{l+1} - X_j^l + a\Delta t) \right) = 0$  directement. Cependant le raisonnement proposé ci-dessus est préférable car il fonctionne même dans le cas où la vitesse de transport est variable et où le maillage n'est pas uniforme (cas où les accroissements  $(X_j^{k+1} - X_j^k + a\Delta t)$  ne sont pas indépendants).

utilisées sont radicalement différentes<sup>19</sup>).

1) Une estimation d'erreur d'ordre  $1/2$  en norme  $L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^d))$  pour tout  $T > 0$ , pour une donnée initiale dans  $BV(\mathbb{R}^d)$ , sur un maillage quelconque (enfin... Sous quelques hypothèses classiques tout de même) et un champ de vitesse donné lipschitzien indépendant du temps.

2) Une estimation d'erreur d'ordre  $1/2 - \varepsilon$  (pour tout  $\varepsilon > 0$ ) en norme  $L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))$  pour une donnée initiale lipschitzienne.

On remarque un hiatus entre l'estimation d'erreur en norme  $L^1$  et celle en norme  $L^\infty$ . On retrouve le même dans [73]. La question « cette estimation est-elle optimale? » est ouverte. Il va de soi que l'expérimentation numérique ne peut permettre de trancher entre  $1/2$  et  $1/2 - \varepsilon$ . Il faut noter que dans le rapide exposé de la méthode fourni ci-dessus *en dimension 1*, on aboutit à l'estimation optimale<sup>20</sup> en norme  $L^\infty$ . Le problème qui apparaît en dimension supérieure est que sur un maillage non cartésien la chaîne de Markov  $(X_j^n)_n$  n'est pas centrée sur la caractéristique exacte  $((X_j^n + na\Delta t)_n$  n'est pas en général une martingale) : elle n'est centrée sur cette caractéristique qu'*en moyenne* en espace (moyenne à effectuer sur les points de départ  $X_j^0$ ), d'où la nécessité de considérer une norme  $L^1$  en espace.

## 1.4 Caractère entropique et comportement en temps long de solutions numériques de lois de conservation scalaires

Je décris ici brièvement un résultat publié dans [d]. Il concerne un lien entre le caractère entropique d'un schéma général de volumes finis pour une équation scalaire et la diffusion numérique qui y est attachée, ou plutôt le comportement asymptotique en temps de la solution numérique associée. Le cadre est celui d'une équation scalaire sur le tore unité  $\mathbb{T}$  (en dimension 1 pour simplifier),

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}, \quad (1.8)$$

assortie d'une donnée initiale  $u^0 \in L^\infty(\mathbb{T})$ ; le flux de l'équation,  $f$ , est supposé lipschitzien, de sorte que le problème de Cauchy admet une unique solution entropique, c'est-à-dire vérifiant au sens des distributions les inégalités

$$\partial_t |u - \kappa| + \partial_x (\text{sgn}(u - \kappa)(f(u) - f(\kappa))) \leq 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}, \quad (1.9)$$

pour tout  $\kappa \in \mathbb{R}$  ([45], [72]). On s'intéresse à la résolution numérique de ce problème à l'aide d'un schéma de volumes finis. On se donne  $J \in \mathbb{N}^*$  et on pose  $\Delta x = 1/J$ . L'évolution de la solution approchée est donnée par

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n \right), \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \{1, \dots, J\}, \quad (1.10)$$

avec  $f_{j+1/2}^n = f_{1/2}^n$  pour tout  $n$  (cela exprime la périodicité du problème). (La définition de la donnée initiale numérique ne joue aucun rôle.) On suppose que les flux numériques à l'étape  $n$  ne dépendent que de  $(u_j^n)_{j=1}^J$  (noter que cela n'exclut pas *a priori* les schémas implicites) : il existe des fonctions continues

<sup>19</sup>L'histoire de l'analyse de l'ordre du schéma upwind (ou de Godunov) est longue. Depuis l'analyse de Nicolaï N. Kuznecov, [64], dans le cadre cartésien non linéaire, de nombreux auteurs se sont intéressés au cas non cartésien : voir par exemple [14, 17, 24, 95] pour une preuve de l'ordre  $1/4$  (c'est vraisemblablement non optimal) en norme  $L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^d))$  dans des cas non linéaires, [96] pour l'ordre  $1/2$  en norme  $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)$  pour des systèmes de Friedrichs. Concernant le problème spécifique des équations de transport, on trouve parmi les derniers résultats (outre ceux de Benoît Merlet et Julien Vovelle) [33] (ordre  $1/2$  en norme  $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^d))$  pour tout  $T > 0$ , pour donnée initiale dans  $H^2(\mathbb{R}^d)$ ) et [11] (ordre 1 en norme  $L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))$  pour donnée initiale de classe  $C^2$  sous certaines hypothèses de consistance sur le maillage).

<sup>20</sup>Optimale? Oui. En norme  $L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}))$ , pour une donnée initiale à variation totale finie, il est connu qu' $1/2$  est l'ordre optimal : voir par exemple [89] ou faire un calcul explicite de la solution avec  $u^0 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}$  (calcul que l'on pourra trouver dans [47]). En ce qui concerne l'estimation en norme  $L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}))$ , pour donnée initiale lipschitzienne, un calcul exact semble plus délicat mais le résultat plus fin que nous avons obtenu – estimation d'erreur (uniforme en temps) d'ordre 1 entre la solution numérique et la solution exacte du problème parabolique (1.7) – permet de montrer qu' $1/2$  est l'ordre optimal. En effet, pour une donnée initiale  $u^0$  lipschitzienne mais pas partout dérivable, par exemple  $u^0(x) = \max(1, |x|)$ , on a  $\|u^0 - g \star u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  de l'ordre de  $\sqrt{at(\Delta x - a\Delta t)}$  si  $g$  est une gaussienne d'écart-type  $\sqrt{at(\Delta x - a\Delta t)}$ , donc la différence entre la solution exacte du problème de transport pur (1.5) et celle du problème de transport-diffusion (1.7) pour la donnée initiale  $u^0$  est, au temps  $t$ , de l'ordre de  $\sqrt{at(\Delta x - a\Delta t)}$  (et pas moins). Comme la différence entre la solution numérique et la solution du problème parabolique est de l'ordre de  $\Delta x$ , il en résulte qu'il reste forcément une erreur d'ordre  $1/2$  (et pas moins) entre la solution numérique et la solution exacte du problème hyperbolique. Le résultat fin utilisé ici montre que la diffusion numérique est le facteur dominant dans l'erreur.

$F_{j+1/2}$  telles que  $f_{j+1/2}^n = F_{j+1/2}(u_1^n, \dots, u_j^n)$  pour tout  $(n, j)$ . On suppose que le schéma est consistant avec les inégalités de Kružkov (1.9) globalement :

$$\sum_{j=1}^J |u_j^{n+1} - \kappa| \leq \sum_{j=1}^J |u_j^n - \kappa|, \quad n \in \mathbb{N}, \kappa \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

Le résultat principal de [d] peut être interprété comme suit.

Considérons un schéma de la forme (1.10) vérifiant (1.11). Supposons que le nombre de Courant soit strictement inférieur à 1 et strictement supérieur à 0. Alors,  $u_j^n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \bar{u}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, J\}$ , où  $\bar{u} = \Delta x \sum_{j=1}^J u_j^0$ .

**Remarque 1.4.1.** Ce résultat n'est pas surprenant dans le cas vraiment non linéaire (cas où  $f''$  ne s'annule que sur un ensemble de mesure nulle). En effet, dans ce cas, on sait que la solution exacte entropique elle-même converge en temps infini vers sa moyenne : voir à ce sujet [22, 23, 27, 28, 48, 65]. Cependant dans le cas numérique présenté ici, seule l'hypothèse de la décroissance de l'intégrale des entropies de Kružkov est faite, et, de plus, le résultat est vrai dans le cas linéaire aussi (alors qu'il est trivialement faux pour les solutions exactes). Ce résultat constitue donc un résultat négatif concernant le comportement en temps long des algorithmes entropiques.

La démonstration de ceci repose essentiellement sur deux résultats d'analyse matricielle (voir [85]). Le premier est que l'on a (1.11) si et seulement s'il existe une matrice bistochastique  $A^n \in \mathcal{M}_J(\mathbb{R})$  telle que  $U^{n+1} = A^n U^n$ , où  $U^n = (u_j^n)_{j=1}^J$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Le second (théorème de Birkhoff) est qu'une matrice carrée est bistochastique si et seulement si c'est une combinaison convexe de matrices de permutation<sup>21</sup>. Ainsi, sous l'hypothèse que toutes les entropies de Kružkov décroissent globalement, on a  $U^n = A^n A^{n-1} \dots A^0 U^0$  où les matrices  $A^k$  sont bistochastiques, c'est-à-dire combinaisons convexes de permutations. On en déduit que le vecteur  $U^n$  reste dans un convexe (en particulier,  $U^n$  appartient à l'enveloppe convexe des  $J!$  vecteurs obtenus en permutant les coordonnées de  $U^{n-1}$ ). On conclut en travaillant un petit peu que la suite  $U^n$  converge (lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ) vers une orbite périodique comportant au plus  $J!$  points différents. Si l'on fait de plus l'hypothèse que le schéma est invariant par translation, ce qui est raisonnable puisque l'équation exacte l'est, le nombre de points différents, c'est-à-dire de valeurs d'adhérence de la suite, est réduit à  $J$  au plus, et toutes ces valeurs d'adhérence sont des translations (d'un certain nombre de mailles) les unes des autres. Enfin, faisons l'hypothèse suivante : les seuls vecteurs  $U \in \mathbb{R}^J$  qui sont translatés exactement par le schéma sont les vecteurs ayant toutes leurs composantes égales (c'est une hypothèse sur le schéma lui-même). On en conclut que  $U^n$  converge vers un vecteur ayant toutes ses composantes égales à, disons,  $\bar{u} \in \mathbb{R}$ , et comme le schéma est conservatif, on a  $J\bar{u} = \sum_{j=1}^J u_j^0$ . On peut interpréter la dernière hypothèse comme le fait que le nombre de Courant  $\max_j |f'(u_j^0)| \Delta t / \Delta x$  du schéma est strictement inférieur à 1. En effet, par analogie avec le cas linéaire  $f(u) = au$  avec  $a > 0$ , avec par exemple le schéma upwind,  $f_{j+1/2}^n = au_j^n$  pour  $j \geq 1$ , on a la propriété entropique sous l'hypothèse  $a\Delta t / \Delta x \leq 1$ , et si  $a\Delta t / \Delta x = 1$  (le nombre de Courant vaut 1 exactement), la solution numérique est  $u_j^n = u_{(j-n)\%J}^0$  : translatée d'une maille à chaque itération. Cette interprétation est un acte de foi.

Je termine ce paragraphe par deux remarques.

D'abord, on constate que dans le cas linéaire  $f(u) = au$  avec  $a > 0$  et le schéma upwind, sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy  $\lambda = a\Delta t / \Delta x \leq 1$ , le schéma s'écrit  $U^{n+1} = AU^n$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & \dots & 0 & \lambda \\ \lambda & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_J(\mathbb{R}),$$

$A$  étant bistochastique, et irréversible si  $\lambda < 1$ . Par application du théorème de Perron-Frobenius, on en déduit que  $U^n$  converge vers  $(\bar{u}, \dots, \bar{u})$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Le résultat formel discuté dans ce

<sup>21</sup>Les matrices de permutation sont les points extrémaux du convexe formé des matrices bistochastiques de  $\mathcal{M}_J(\mathbb{R})$ .



paragraphe est une généralisation de ceci, dans le cas où la matrice  $A$  change à chaque itération, sous la contrainte que toutes les entropies de Kružkov décroissent.

Ensuite, je signale une relation intéressante ou au moins amusante<sup>22</sup> entre les inégalités de Kružkov et les réarrangements de vecteurs (voir [49] et aussi [85]). Soit  $U \in \mathbb{R}^J$ . On appelle *réarrangement décroissant* de  $U$  le vecteur  $U_\downarrow \in \mathbb{R}^J$  tel qu'il existe une matrice de permutation  $P$  pour laquelle  $U_\downarrow = PU$  et tel que  $U_{\downarrow j+1} \leq U_{\downarrow j}$  pour tout  $j \leq J-1$ . Alors, si  $U, V \in \mathbb{R}^J$ ,

$$\sum_{j=1}^J |V_j - \kappa| \leq \sum_{j=1}^J |U_j - \kappa| \text{ pour tout } \kappa \in \mathbb{R}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^l V_{\downarrow j} \leq \sum_{j=1}^l U_{\downarrow j} \text{ pour tout } l \in \{1, \dots, J\}, \\ \sum_{j=1}^J V_{\downarrow j} = \sum_{j=1}^J U_{\downarrow j}. \end{cases}$$

## 1.5 Formalisme de Harten généralisé

En dimension 1, un résultat de Le Roux et de Harten (dans [69, 50]) assure qu'un schéma de la forme

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - D_{j-1/2}^n (u_j^n - u_{j-1}^n), \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},$$

avec  $C_{j+1/2}^n, D_{j+1/2}^n \in [0, 1]$  et  $C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n \leq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $j \in \mathbb{Z}$  est à variation totale décroissante, c'est-à-dire vérifie  $\sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ceci a une conséquence très utile pour les équations de transport en dimension 1 : supposons pour simplifier que la vitesse de transport est positive, alors il est naturel qu'un schéma numérique vérifie, pour un pas de temps petit,  $u_j^{n+1} \in [\min(u_{j-1}^n, u_j^n), \max(u_{j-1}^n, u_j^n)]$ . Ceci implique la décroissance de la variation totale, car il existe  $\gamma_j^n \in [0, 1]$  tel que

$$u_j^{n+1} = (1 - \gamma_j^n) u_j^n + \gamma_j^n u_{j-1}^n = u_j^n - \gamma_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (1.12)$$

(poser alors  $C_{j+1/2}^n = 0$  et  $D_{j-1/2}^n = \gamma_j^n$  pour appliquer le lemme de Le Roux et Harten). En dimension 2, un tel résultat impliquant la décroissance de la variation totale n'est pas disponible, pour plusieurs raisons. La première est que lorsque la vitesse de transport n'est pas constante, la solution exacte elle-même n'est pas toujours à variation totale décroissante. Une autre raison est que sur un maillage général, le schéma upwind lui-même n'est pas à variation totale décroissante, même dans le cas où la vitesse est constante. On connaît même des configurations où la variation totale (en espace) de la solution numérique au temps  $t$  est de l'ordre de  $\sqrt{t/h}$  où  $h$  est le diamètre maximal des mailles : voir [33]. En ce qui concerne les solutions exactes d'équations de transport en dimension supérieure à 1, l'augmentation de la variation totale est en quelque sorte due à des lignes de glissement dans le champ de vitesse. Il paraît donc naturel de s'intéresser à la variation totale de la vitesse *le long des courbes intégrales* du champ de vitesse (considérons une vitesse ne dépendant pas du temps). C'est une variation totale mono-dimensionnelle. Dans [e], avec Bruno Després, nous avons donné une formulation multi-dimensionnelle du critère de Le Roux et Harten qui assure la décroissance de cette variation totale, que nous avons dénommée *variation totale longitudinale*. Nous étudions le cas simplifié de l'advection à vitesse constante en dimension 2

$$\partial_t u + a \cdot \nabla u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \quad (1.13)$$

où  $\mathbb{T}$  est le tore unité de  $\mathbb{R}^2$ . Pour définir un schéma de volumes finis pour cette équation, on se donne un maillage du tore,  $(\Omega_j)_{j \in J}$  où  $J$  est de cardinal fini :

$$\begin{cases} \Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset \text{ pour } j, k \in J, j \neq k, \\ \overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_k} \text{ est soit vide, soit un point, soit un segment, si } j \neq k, \\ \bigcup_{j \in J} \overline{\Omega_j} = \mathbb{T}. \end{cases}$$

<sup>22</sup>Et que j'ai utilisée dans [d].

Pour tout  $j \in J$  on note  $s_j = \text{mes}_2(\Omega_j)$  la surface de la maille d'indice  $j$ . Pour tout  $j \in J$ , soit  $I(j)$  l'ensemble des indices des mailles ayant un côté en commun avec  $\Omega_j$  :  $I(j) = \{k \in J \text{ t.q. } l_{j,k} = \text{mes}_1(\overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_k}) > 0\}$  (la longueur du côté commun est donc notée  $l_{j,k}$ ). Pour  $j \in J$  et  $k \in I(j)$ , on note  $n_{j,k}$  le vecteur normal au côté, unitaire, sortant de  $\Omega_j$ . Enfin, parmi les bords de  $\Omega_j$ , on distingue les bords « entrants » des bords « sortants » (relativement à la vitesse  $a$ ) :

$$\begin{aligned} I^+(j) &= \{k \in I(j) \text{ t.q. } a \cdot n_{j,k} > 0\} \text{ (ensemble des indices des bords sortants),} \\ I^-(j) &= \{k \in I(j) \text{ t.q. } a \cdot n_{j,k} < 0\} \text{ (ensemble des indices des bords entrants),} \end{aligned} \quad j \in J.$$

Alors une méthode de volumes finis générale pour (1.13) s'écrit sous la forme

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{s_j} \left( \sum_{k \in I^+(j)} m_{j,k} u_{j,k}^n - \sum_{k \in I^-(j)} m_{j,k} u_{j,k}^n \right), \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times J,$$

avec  $m_{j,k} = l_{j,k} |a \cdot n_{j,k}|$ , les valeurs  $u_{j,k}^n$  étant les flux numériques et étant à définir. Il est naturel de considérer des flux tels que  $u_{j,k}^n = u_{k,j}^n$  pour tout  $j \in J$ , tout  $k \in I(j)$ , tout  $n \in \mathbb{N}$  pour obtenir un schéma conservatif : faisons-le dorénavant. Le schéma upwind est celui obtenu en prenant  $u_{j,k}^n = u_k^n$  pour  $j \in J$  et  $k \in I^-(j)$ , et  $u_{j,k}^n = u_j^n$  pour  $j \in J$  et  $k \in I^+(j)$ . Par utilisation d'une formule de Green on a  $\sum_{k \in I^+(j)} m_{j,k} = \sum_{k \in I^-(j)} m_{j,k}$ , donc le schéma upwind se réécrit

$$u_j^{n+1} = (1 - \gamma_j) u_j^n + \gamma_j \sum_{k \in I^-(j)} p_{j,k} u_k^n, \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times J,$$

avec  $\gamma_j = \Delta t \sum_{k \in I^-(j)} m_{j,k} / s_j$  et  $p_{j,k} = m_{j,k} / \sum_{l \in I^-(j)} m_{j,l}$ . Cette écriture et une analogie avec l'équation (1.12) en dimension 1 incitent à requérir d'un schéma *général* qu'il vérifie

$$u_j^{n+1} \in \left[ \min \left( \sum_{k \in I^-(j)} p_{j,k} u_k^n, u_j^n \right), \max \left( \sum_{k \in I^-(j)} p_{j,k} u_k^n, u_j^n \right) \right],$$

soit :

$$\text{pour tout } (n, j) \in \mathbb{N} \times J, \text{ il existe } \gamma_j^n \in [0, 1] \text{ tel que } u_j^{n+1} = (1 - \gamma_j^n) u_j^n + \gamma_j^n \sum_{k \in I^-(j)} p_{j,k} u_k^n. \quad (1.14)$$

Posons, pour tout  $(n, j) \in \mathbb{N} \times J$ ,  $V_j^n = \left| \sum_{k \in I^-(j)} m_{j,k} (u_j^n - u_k^n) \right|$ . La *variation totale longitudinale* de la solution numérique au pas de temps  $n$  est  $\sum_{j \in J} V_j^n$ . Dans [e], nous montrons que si le schéma vérifie le critère de Harten généralisé (1.14), la solution satisfait à

$$\sum_{j \in J} V_j^{n+1} \leq \sum_{j \in J} V_j^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy  $\Delta t \sum_{k \in I^-(j)} m_{j,k} \leq s_j$  pour tout  $j \in J$  (en fait nous y montrons un résultat un peu plus général, vrai indépendamment du fait que l'on résout une équation de transport, et qui est une conséquence du théorème de Perron-Frobenius).

## Chapitre 2

# Développement de méthodes numériques et calcul scientifique

Dans ce chapitre je décris quelques méthodes numériques que j'ai proposées pour résoudre de manière précise des problèmes de type transport dans des systèmes hyperboliques. Dans les cas simples (linéaires ou scalaires), elles sont étayées par quelques éléments d'analyse (de stabilité, etc.). Dans les autres, les algorithmes sont développés de manière heuristique et seuls les résultats numériques permettent de juger de leur pertinence (c'est la partie *calcul scientifique* de ce mémoire).

### 2.1 Décentrage aval sous contraintes amont

Ce paragraphe reprend des travaux que j'ai effectués avec Bruno Després pendant ma thèse, publiés dans [f] : il s'agit de l'expression de conditions peu restrictives de stabilité (au sens : principe du maximum et décroissance de la variation totale) de la solution numérique de l'équation de transport en dimension 1 afin de trouver des schémas numériques précis. Pour simplifier, en voici l'exposé dans le cas où la vitesse de transport  $u$  est constante et strictement positive. On considère

$$\begin{cases} \partial_t c + u \partial_x c = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ c(0, x) = c^0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où  $c^0 \in BV(\mathbb{R})$ , et un schéma de volumes finis général

$$\begin{cases} c_j^{n+1} = c_j^n - \lambda \left( c_{j+1/2}^n - c_{j-1/2}^n \right), & (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \\ c_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} c^0(x) dx, & j \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

où  $\Delta t, \Delta x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\lambda = u \Delta t / \Delta x$ . On cherche des conditions sur les flux  $c_{j+1/2}^n$  qui garantissent à la fois le principe du maximum discret et la décroissance de la variation totale :  $\sum_j |c_{j+1}^{n+1} - c_j^{n+1}| \leq \sum_j |c_{j+1}^n - c_j^n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour cela, d'après un lemme de Le Roux et/ou de Harten (déjà évoqué dans le paragraphe 1.5, cf. [69, 50]), il suffit de trouver des conditions sous lesquelles on aura  $c_j^{n+1} \in [m_{j-1/2}^n, M_{j-1/2}^n]$  pour tout  $j$  et tout  $n$ , avec  $m_{j-1/2}^n = \min(c_{j-1}^n, c_j^n)$  et  $M_{j-1/2}^n = \max(c_{j-1}^n, c_j^n)$ . On cherche des flux tels que

$$m_{j-1/2}^n \leq c_j^n - \lambda \left( c_{j+1/2}^n - c_{j-1/2}^n \right) \leq M_{j-1/2}^n,$$

soit

$$c_{j-1/2}^n + \frac{c_j^n - M_{j-1/2}^n}{\lambda} \leq c_{j+1/2}^n \leq c_{j-1/2}^n + \frac{c_j^n - m_{j-1/2}^n}{\lambda},$$

mais ces inégalités lient les  $c_{j+1/2}^n$  (pour tous  $j \in \mathbb{Z}$ ) entre eux. Une condition de consistance naturelle est  $c_{j-1/2}^n \in [m_{j-1/2}^n, M_{j-1/2}^n]$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ . Une condition suffisante pour avoir la double inégalité est,

sous cette nouvelle condition,

$$M_{j-1/2}^n + \frac{c_j^n - M_{j-1/2}^n}{\lambda} \leq c_{j+1/2}^n \leq m_{j-1/2}^n + \frac{c_j^n - m_{j-1/2}^n}{\lambda}.$$

Ces inégalités sont compatibles (le membre de gauche est inférieur au membre de droite) sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy  $\lambda \leq 1$ . Si l'on pose

$$\begin{aligned} a_{j+1/2}^n &= \max \left( m_{j+1/2}^n, M_{j-1/2}^n + \frac{c_j^n - M_{j-1/2}^n}{\lambda} \right), \\ A_{j+1/2}^n &= \min \left( M_{j+1/2}^n, m_{j-1/2}^n + \frac{c_j^n - m_{j-1/2}^n}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},$$

la condition  $c_{j+1/2}^n \in [a_{j+1/2}^n, A_{j+1/2}^n]$  assure la stabilité demandée.

Le choix de flux  $c_{j+1/2}^n$  que nous avons fait consiste en un *décentrage vers l'aval* au maximum dans cet intervalle. Cela revient à prendre

$$c_{j+1/2}^n = \begin{cases} a_{j+1/2}^n & \text{si } c_{j+1}^n < a_{j+1/2}^n, \\ c_{j+1}^n & \text{si } c_{j+1}^n \in [a_{j+1/2}^n, A_{j+1/2}^n], \\ A_{j+1/2}^n & \text{si } c_{j+1}^n > A_{j+1/2}^n. \end{cases}$$

Le choix du décentrage aval est motivé par la recherche d'un schéma non diffusif et donc d'un schéma qui ne « vide » pas une maille avant qu'elle ne soit « pleine ». Les connexions avec les schémas *réservoirs* (cf. [2, 3]) sont en effet nombreuses. Par ailleurs, dans ce cas précis du transport à vitesse constante, nous avons montré que ce schéma était équivalent au limiteur Ultrabee (voir [91]), ce qui établit le lien avec la théorie des limiteurs (cf. [88, 45]). L'écriture des conditions de stabilité et donc du schéma décentré aval sous ces conditions dans le cas où  $u$  est variable (positif) est triviale : il suffit de remplacer  $\lambda$  par  $\lambda_j^n = u(n\Delta t, j\Delta x)\Delta t/\Delta x$  dans la définition des bornes  $a_{j+1/2}^n$  et  $A_{j+1/2}^n$ .

L'algorithme ainsi défini est d'ordre 1 seulement (formellement, c'est-à-dire qu'il est consistant à l'ordre 1 au sens des différences finies) mais a la bonne propriété de fournir la solution exacte de l'équation de transport (à vitesse constante) lorsque la donnée initiale est une fonction constante par morceaux (et que le maillage est assez fin pour *résoudre* chaque « morceau »). De plus, de nombreux tests numériques nous ont conduits à conjecturer le résultat suivant.

*Supposons que  $\lambda \in ]0, 1[ \setminus \{1/2\}$ . Notons  $c_{\Delta x}$  la solution numérique considérée comme une fonction sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  (avec  $\Delta t = \lambda\Delta x/u$ ). Il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que*

$$\|c(t, \cdot) - c_{\Delta x}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}))} \leq C\Delta x, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Les deux points marquants dans cette inégalité sont que l'ordre du schéma est (serait) 1 (au lieu de 1/2 pour le schéma upwind, voir le paragraphe 1.3) et que l'erreur est (serait) bornée uniformément en temps (alors que pour le schéma upwind elle croît en  $\sqrt{t}$ , voir encore le paragraphe 1.3).

Il faut noter que l'inconvénient majeur de cet algorithme est qu'il n'est pas entropique. Pour des équations non linéaires comme l'équation de Burgers (pour lesquelles la dérivation des conditions de stabilité se révèle aussi facile à effectuer que pour le transport, au moins lorsque la vitesse des caractéristiques est de signe constant), ce schéma se révèle très mauvais. En particulier, il sélectionne systématiquement la solution « choc de détente » lorsqu'une détente doit apparaître. Cela a motivé mes travaux [u] et [i, j], dont un résumé commence à la page 32 du présent document.

Dans [f], nous proposons une utilisation de ce schéma de transport pour résoudre les équations de la dynamique des gaz compressibles. L'algorithme global pour ce système des équations d'Euler est basé sur un splitting Lagrange-projection : une première étape consiste (à chaque pas de temps) à résoudre les équations en variables lagrangiennes (cette résolution étant effectuée au moyen d'un algorithme classique, le schéma acoustique, voir [8, 30, 31, 39, 40] par exemple). La procédure de retour en variables eulériennes peut s'exprimer comme une phase de transport, c'est ce qui autorise l'utilisation d'un schéma de transport comme celui décrit ci-dessus. L'avantage de ce schéma est qu'il permet un calcul très précis des discontinuités de contact (en particulier, pour un cas-test du type tube à choc de Sod, la discontinuité de contact est placée sur une maille au plus). Nous avons d'ailleurs démontré que pour un gaz parfait, le schéma donnait la solution exacte dans le cas d'une discontinuité de contact pure, c'est-à-dire

lorsque la pression et la vitesse initiales sont constantes en espace et la densité initiale est une fonction de Heaviside. L'inconvénient de ce schéma est qu'il n'est ni positif ni entropique. On constate sur certains résultats numériques que les détentés peuvent être « chahutées », cela conduit à des solutions numériques peu satisfaisantes dans des cas-tests exigeants comme celui de Collela et Woodward (issu de [97]). Une extension en dimension 2 de ce schéma non dissipatif, *via* un nouveau splitting, dimensionnel celui-ci, est proposée dans [f].

Zhengfu Xu et Chi-Wang Shu ont développé dans [98] un schéma hybride utilisant un algorithme Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) (efficace dans les zones où la solution est régulière) et ce schéma anti-dissipatif (efficace aux abords des discontinuités de contact). La transition entre le schéma WENO et l'algorithme anti-dissipatif y est pilotée par un senseur de régularité locale de la solution (voir aussi [99]). Ce type d'algorithmes, avec ce formalisme, a par ailleurs été utilisé avec succès par Stéphane Dellacherie dans [29] pour la résolution approchée d'un modèle diphasique bidimensionnel à faible nombre de Mach. Enfin, Olivier Bokanowski, Sophie Martin, Rémi Munos et Hasnaa Zidani ont tiré parti des propriétés anti-dissipatives de l'algorithme Ultrabee pour résoudre des problèmes de viabilité dans [9], et Olivier Bokanowski et Hasnaa Zidani ont mis au point dans [10] une modification de ce schéma pour obtenir un schéma d'ordre 2 tout en préservant le transport exact des discontinuités, pour l'advection ainsi que les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman.

## 2.2 Un schéma cinétique basé sur le schéma décentré aval sous contraintes amont (qui ne tente rien n'a rien)

Voici une tentative de développement d'un algorithme non dissipatif pour les équations d'Euler qui soit anti-dissipatif pour tous les champs caractéristiques (et sans utiliser de splitting Lagrange-projection comme dans [f], à peine évoqué au paragraphe 2.1 ci-dessus). Cette tentative s'est soldée par un échec mais le résultat me semble suffisamment amusant pour être rapporté ici (d'autant que ceci n'a pas été publié).

L'idée est d'utiliser le formalisme des schémas cinétiques de [77] (voir aussi [15, 78] pour le cas scalaire). Le principe des schémas cinétiques est le suivant. On considère (ici en dimension 1) les équations d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, \\ \varepsilon = e - u^2/2, \\ p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \\ T = (\gamma - 1)\varepsilon, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad (2.1)$$

pour  $\gamma \in ]1, 3]$ , avec donnée initiale  $(\rho, u, T)(0, x) = (\rho^0, u^0, T^0)(x)$ . Soit  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{cases} \chi(-v) = \chi(v), \quad v \in \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} \chi(w) dw = 1, \\ \int_{\mathbb{R}} \chi(w) w^2 dw = 1. \end{cases}$$

(Pour le schéma numérique, on prendra  $\chi(v) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbb{1}_{[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]}(v)$ .) Posons

$$\begin{cases} f^0(x, v) = \frac{\rho^0(x)}{\sqrt{T^0(x)}} \chi\left(\frac{v - u^0(x)}{\sqrt{T^0(x)}}\right), \\ g^0(x, v) = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)} \rho^0(x) \sqrt{T^0(x)} \chi\left(\frac{v - u^0(x)}{\sqrt{T^0(x)}}\right), \end{cases} \quad (x, v) \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Alors la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t f + v \partial_x f = 0, \\ \partial_t g + v \partial_x g = 0, \end{cases} \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

avec donnée initiale  $(f^0, g^0)$  est telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}} f(t, x, w) dw = \rho(t, x) + \mathcal{O}(t), \\ \int_{\mathbb{R}} f(t, x, w)w dw = \rho(t, x)u(t, x) + \mathcal{O}(t), \\ \int_{\mathbb{R}} (f(t, x, w)w^2/2 + g(t, x, w)) dw = \rho(t, x)e(t, x) + \mathcal{O}(t), \end{array} \right. \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

où  $(\rho, u, e)$  est la solution (régulière) du problème de Cauchy associé à (2.1) (c'est le résultat préliminaire de [77]). L'idée des schémas cinétiques est de résoudre les équations de transport de (2.3) sur un petit pas de temps  $\Delta t > 0$ , et de calculer les trois moments de la solution,  $\int_{\mathbb{R}} f(\Delta t, x, w) dw$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f(\Delta t, x, w)w dw$  et  $\int_{\mathbb{R}} (f(\Delta t, x, w)w^2/2 + g(\Delta t, x, w)) dw$  pour avoir une valeur approchée des quantités conservatives  $(\rho, \rho u, \rho e)$ . L'algorithme est :

- pour une donnée  $(\rho, u, T)$ , calculer les fonctions cinétiques  $(f, g)$  associées par la formule (2.2) ;
- résoudre les équations de transport (2.3) avec  $(f, g)$  pour données initiales, pour un temps final (petit)  $\Delta t$  ;
- poser  $(\rho, u, e) = (\int_{\mathbb{R}} f(\Delta t, x, w) dw, \int_{\mathbb{R}} f(\Delta t, x, w)w dw, \int_{\mathbb{R}} (f(\Delta t, x, w)w^2/2 + g(\Delta t, x, w)) dw)$  ;
- en déduire une nouvelle valeur (approchée) de  $(\rho, u, T)$

et recommencer. L'intérêt réside dans le fait que les équations à résoudre sont celles du transport linéaire. Pour écrire le schéma numérique cinétique sous la forme classique

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (\rho u)_{j+1/2}^n - (\rho u)_{j-1/2}^n \right), \\ \rho_j^{n+1} u_j^{n+1} = \rho_j^n u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (\rho u^2 + p)_{j+1/2}^n - (\rho u^2 + p)_{j-1/2}^n \right), \\ \rho_j^{n+1} e_j^{n+1} = \rho_j^n e_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (\rho e + pu)_{j+1/2}^n - (\rho e + pu)_{j-1/2}^n \right), \end{array} \right. \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},$$

il suffit de choisir un schéma pour l'équation de transport  $\partial_t f + v\partial_x f = 0$  (nous utiliserons le même schéma pour l'équation vérifiée par  $g$ ) :

$$f_j^{n+1}(v) = f_j^n(v) - v \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{j+1/2}^n(v) - f_{j-1/2}^n(v) \right), \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, v \in \mathbb{R},$$

et de poser

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho u)_{j+1/2}^n = \int_{\mathbb{R}} f_{j+1/2}^n(w)w dw, \\ (\rho u^2 + p)_{j+1/2}^n = \int_{\mathbb{R}} f_{j+1/2}^n(w)w^2 dw, \\ (\rho e + pu)_{j+1/2}^n = \int_{\mathbb{R}} (f_{j+1/2}^n(w)w^3/2 + g_{j+1/2}^n(w)w) dw, \end{array} \right. \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Utiliser le flux upwind pour  $f_{j+1/2}^n(v)$  et  $g_{j+1/2}^n(v)$  conduit à un schéma (très) dissipatif. Essayons d'utiliser plutôt un algorithme anti-dissipatif. Le flux décentré aval sous contraintes amont, défini dans le paragraphe 2.1, est, pour  $v > 0$ ,

$$f_{j+1/2}^n(v) = \begin{cases} a_{j+1/2}^n(v) & \text{si } f_{j+1}^n(v) < a_{j+1/2}^n(v), \\ f_{j+1}^n(v) & \text{si } f_{j+1}^n(v) \in [a_{j+1/2}^n(v), A_{j+1/2}^n(v)], \\ A_{j+1/2}^n(v) & \text{si } f_{j+1}^n(v) > A_{j+1/2}^n(v), \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} m_{j+1/2}^n(v) &= \min(f_j^n(v), f_{j+1}^n(v)), \\ M_{j+1/2}^n(v) &= \max(f_j^n(v), f_{j+1}^n(v)), \\ a_{j+1/2}^n(v) &= \max\left(m_{j+1/2}^n, M_{j-1/2}^n(v) + \frac{f_j^n(v) - M_{j-1/2}^n(v)}{v\Delta t/\Delta x}\right), \\ A_{j+1/2}^n(v) &= \min\left(M_{j+1/2}^n, m_{j-1/2}^n(v) + \frac{f_j^n(v) - m_{j-1/2}^n(v)}{v\Delta t/\Delta x}\right), \end{aligned} \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$$

(avec des formules analogues pour le cas  $v < 0$ ). L'intégration des moments des flux  $f_{j+1/2}^n(v)$  et  $g_{j+1/2}^n(v)$  par rapport à  $v$  (système (2.4)) est relativement compliquée, au moins aussi compliquée qu'inutile à retranscrire ici.

Il faut observer que, le principe du maximum étant vérifié par le schéma décentré aval sous contraintes amont, le schéma cinétique défini par ce biais est automatiquement positif pour la densité  $\rho$  ainsi que la température  $T$  sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy

$$|v|\Delta t/\Delta x \leq 1 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R} \text{ tel que } f_j^n(v) \text{ dépend de } j \text{ (à } n \text{ fixé)}.$$

Ceci implique (avec la fonction  $\chi$  choisie) la positivité du schéma : si  $\rho_j^n > 0$  et  $T_j^n > 0$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho_j^{n+1} > 0$  et  $T_j^{n+1} > 0$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , sous la condition  $\max_j |u_j^n \pm \sqrt{3T_j^n}| \Delta t/\Delta x \leq 1$  (la démonstration est la même que dans [77]). Mais bien sûr les inégalités entropiques obtenues en décentrage amont (voir [77]) ne sont pas vérifiées ici... Voici quelques résultats numériques obtenus avec ce schéma. Le cas-test est celui de Sod :

$$(\rho^0, u^0, p^0)(x) = \begin{cases} (1, 0, 1) & \text{pour } x < 1/2, \\ (1/8, 0, 1/10) & \text{pour } x > 1/2, \end{cases}$$

pour un gaz parfait de coefficient  $\gamma = 1,4$  et le temps final est  $t = 0,14$ . Les figures 2.1, 2.2 présentent la densité, la vitesse, la pression et l'entropie  $\ln(\varepsilon\tau^{\gamma-1})$  calculées avec 100 mailles et des nombres de Courant<sup>1</sup> respectifs 1 et 0,1. Les figures 2.3 et 2.4 présentent les mêmes variables calculées avec 1000 mailles. On constate que les solutions oscillent beaucoup lorsque le nombre de Courant est petit...

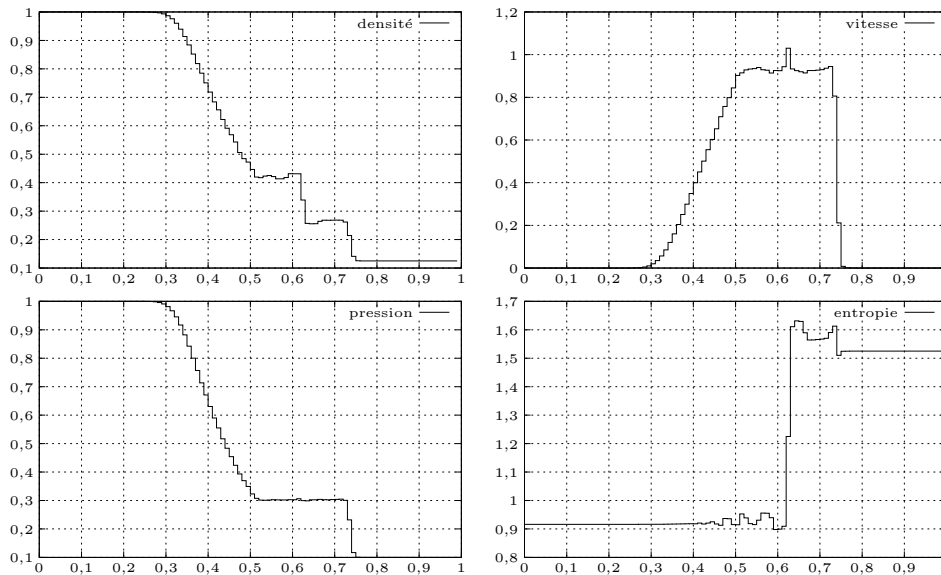


FIG. 2.1 – Solution pour un tube à choc de Sod (temps final  $t = 0,14$ ) avec 100 mailles et un nombre de Courant 1.

<sup>1</sup>On appelle ici nombre de Courant la valeur de  $\max_j |u_j^n \pm \sqrt{3T_j^n}| \Delta t/\Delta x$ .

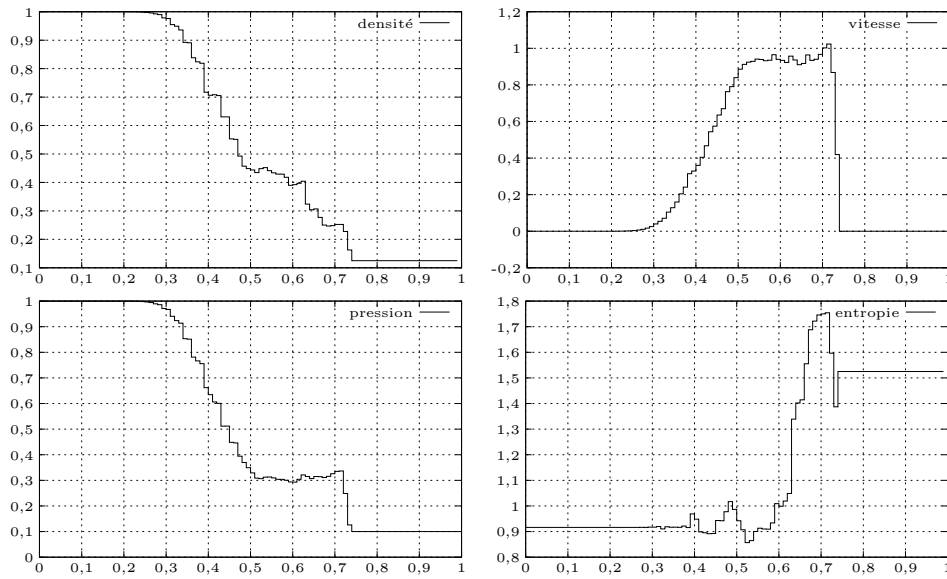


FIG. 2.2 – Solution pour un tube à choc de Sod (temps final  $t = 0,14$ ) avec 100 mailles et un nombre de Courant 0,1.

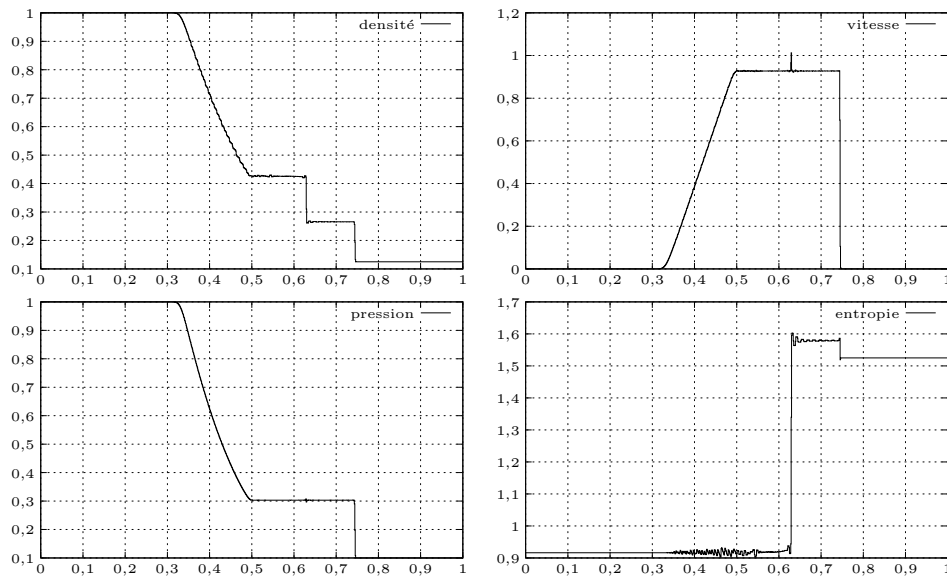


FIG. 2.3 – Solution pour un tube à choc de Sod (temps final  $t = 0,14$ ) avec 1000 mailles et un nombre de Courant 1.



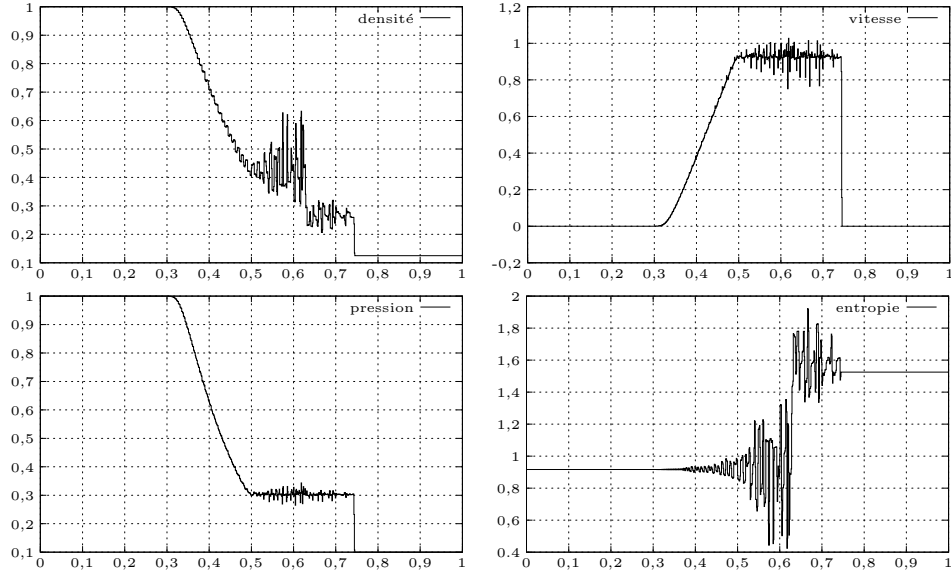


FIG. 2.4 – Solution pour un tube à choc de Sod (temps final  $t = 0,14$ ) avec 1000 mailles et un nombre de Courant 0,1.

Il serait sans doute intéressant de chercher une manière de rendre cet algorithme plus stable (par exemple en le rendant entropique?) car les chocs et discontinuités de contact sont bien préservés.

## 2.3 Transport de constituants

Les algorithmes dédiés aux équations de transport (scalaires) peuvent être facilement incorporés à des algorithmes traitant des *systèmes* dans lesquels des phénomènes de transport sont présents. Par exemple, on trouve des phénomènes de transport dans les équations d'Euler, et l'algorithme anti-dissipatif y a été utilisé, avec un succès mitigé, à l'aide d'un *splitting* Lagrange-projection, dans [f]. Un autre exemple met en évidence de manière beaucoup plus claire les phénomènes de transport : les équations de la dynamique des gaz à *plusieurs* constituants. Celles que l'on considère ici sont, pour  $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} \partial_t(\rho c_i) + \partial_x(\rho c_i u) = 0, i = 1, 2, \\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, \end{cases}$$

où les notations, classiques, sont celles du paragraphe 1.1 (en particulier,  $c_i$  est la fraction massique du constituant  $i$ ). Ce système est fermé au moyen de relations qui ne sont pas l'objet de la discussion (de nombreuses sont possibles : voir par exemple mon mémoire de thèse [v], ou [81, 1]). On remarque que, en ce qui concerne les solutions régulières de ce système, les équations de conservation de la masse de chacun des constituants,  $\partial_t(\rho c_i) + \partial_x(\rho c_i u) = 0$ , sont équivalentes à  $\partial_t c_i + u \partial_x(c_i) = 0$  pour  $i = 1, 2$ . Ceci permet d'utiliser le schéma anti-dissipatif du paragraphe 2.1. Ici, seules les fractions massiques  $c_1$  et  $c_2$  sont calculées au moyen de cet algorithme. C'est beaucoup plus judicieux (!) que dans le paragraphe 2.1, où  $\rho$ ,  $\rho u$  et  $\rho e$  étaient transportés (dans la phase de projection de l'algorithme Lagrange-projection) au moyen de ce schéma non entropique. En particulier, ce choix a rendu possible l'écriture d'un algorithme entropique lorsque le modèle de fermeture choisi est le modèle *isobare avec équirépartition des quantités de chaleur* (modèle non conservatif qui impose  $p = p_1 = p_2$ <sup>2</sup> et  $T_1(\partial_t S_1 + u \partial_x S_1) = T_2(\partial_t S_2 + u \partial_x S_2)$ , c'est-à-dire que les dépôts de chaleur (lagrangiens) sont les mêmes pour les deux constituants<sup>3</sup>). La propriété

<sup>2</sup>Où  $p_1$  et  $p_2$  sont les pressions calculées au moyen des lois de pression (connues) des constituants 1 et 2.

<sup>3</sup>Dans cette équation  $T_1$  et  $T_2$  sont...

anti-dissipative du schéma est conservée : lorsque  $c_1$  et  $c_2$  sont initialement des fonctions indicatrices (les constituants sont séparés par des interfaces), les interfaces ne sont jamais situées sur plus d'une maille au cours du calcul. Ce travail, issu de ma thèse, ainsi qu'une extension aux équations tridimensionnelles (avec un splitting directionnel), est consigné dans [g] (où l'on trouvera l'énoncé des propriétés entropiques et des résultats numériques). Voici un petit résultat qui atteste la stabilité et la précision de cette méthode. Il s'agit d'un calcul d'instabilité de type Richtmyer-Meshkov (un choc traverse une interface), le cas-test de Stony Brook (cf. [43]). Le domaine de calcul est  $(x, y, z) \in [0, 0, 018] \times [0, 0, 018] \times [0, 0, 06]$ , avec des conditions de mur sur les bords en  $x$  et en  $y$ , et des conditions « neutres » en  $z$ . L'interface entre les deux constituants est initialement placée en

$$z = f(x, y) = 0,005 \cos(2\pi \sqrt{x^2 + y^2}/0,036) + 0,012.$$

Les deux constituants ont la même loi d'état de gaz parfait,  $p = (\gamma - 1)\rho(e - u^2/2)$  avec  $\gamma = 5/3$ . Les conditions initiales sont

$$(\rho, u, p, c_1, c_2) = \begin{cases} (2,95, (0, 0, -453), 50000, 1, 0) & \text{pour } z > f(x, y), \\ (1,87, (0, 0, -453), 50000, 0, 1) & \text{pour } f(x, y) > z > 0,09, \\ (6,01, (0, 0, 55, 5), 753000, 0, 1) & \text{pour } 0,09 > z. \end{cases}$$

Un choc partant de  $z = 0,09$  à l'instant initial se dirige vers l'interface et une instabilité en champignon se développe lorsque le choc traverse l'interface. La figure 2.5 représente la fraction massique  $c_1$  au temps final,  $t = 0,00105$ . Cette fraction y est « seuillée » à 0,1 et à 0,9. La comparaison avec le schéma upwind (qui introduit un mélange numérique, artéfactuel) montre l'avantage d'une méthode anti-dissipative. La figure 2.6 représente le même résultat, seuillé à 0,5 seulement. La comparaison avec le résultat obtenu avec le schéma upwind montre qu'un post-traitement (de seuillage) sur le résultat diffusé ne suffit pas à récupérer avec précision la position de l'interface. Le domaine est maillé avec  $65 \times 65 \times 216$  mailles (presque carrées).

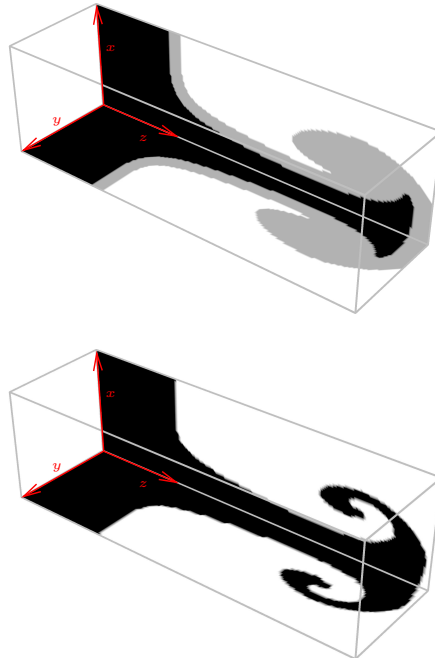


FIG. 2.5 – Instabilité de Richtmyer-Meshkov (fraction massique) avec le schéma upwind (en haut) et le schéma décentré aval sous contraintes amont (en bas), seuils à 0,1 et 0,9.

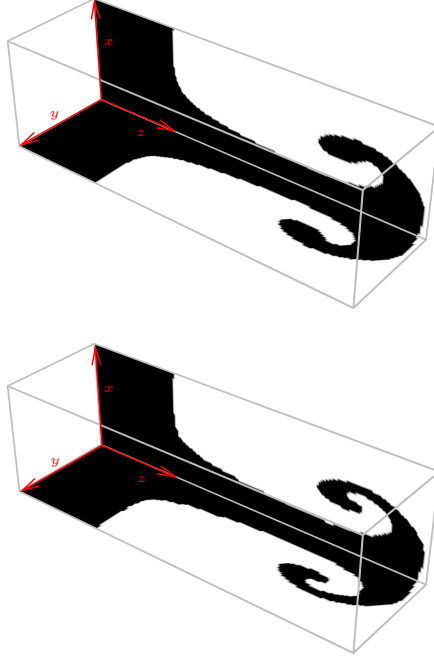


FIG. 2.6 – Instabilité de Richtmyer-Meshkov (fraction massique) avec le schéma upwind (en haut) et le schéma décentré aval sous contraintes amont (en bas), seuil à 0,5.

On peut s'interroger sur le fait que le nombre de constituants dans le système ci-dessus est 2... Le travail effectué s'adapte-t-il à un nombre de constituants supérieur? Oui, mais ce n'est pas direct. Le problème est le suivant. Les quantités  $c_i$  sont des *fractions* massiques, donc on s'attend à ce que  $\sum_i c_i(t, x) = 1$  pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . En supposant que la condition initiale vérifie cette identité, c'est le cas pour les solutions régulières du système (c'est une conséquence de la conservation de la masse totale  $\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0$ ). En revanche cette propriété est délicate du point de vue numérique. Si l'on utilisait un schéma linéaire (par exemple le schéma upwind) pour transporter chaque fraction massique, le résultat serait acquis. Mais cela est exclu pour des raisons de précision, et l'on a décidé d'utiliser le schéma anti-dissipatif décrit plus haut. Ce schéma n'est pas linéaire mais a la propriété d'être stable par multiplication par un scalaire ainsi que par addition d'une constante, au sens suivant. Si  $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $(d_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  sont deux données discrètes, et  $(c_{j+1/2})_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $(d_{j+1/2})_{j \in \mathbb{Z}}$  sont les flux décentrés aval sous contraintes de stabilité associés, s'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $d_j = \alpha c_j + \beta$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on a  $d_{j+1/2} = \alpha c_{j+1/2} + \beta$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ . Conséquence : si  $c_{2j}^n = 1 - c_{1j}^n$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $c_{2j+1/2}^n = 1 - c_{1j+1/2}^n$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  et donc  $c_{2j}^{n+1} = 1 - c_{1j}^{n+1}$ . Mais ce raisonnement ne s'applique plus dès que le nombre de constituants est supérieur ou égal à 3.

Avec Stéphane Jaouen, nous avons, dans [h], défini des contraintes de stabilité équivalentes à celles que l'on a vues ci-dessus mais pour un nombre quelconque de fractions massiques, tout en garantissant que la somme des fractions massiques reste égale à 1 au cours du temps. Pour cela on adopté le même point de vue que dans le cas d'une ou deux équations de transport : cherché pour chaque flux de fraction massique un intervalle garantissant la stabilité de celle-ci, et assurant de surcroît que la somme de tous les flux soit égale à 1. Une analyse globale semble difficile et nous avons opté pour un calcul séquentiel des fractions massiques, à savoir une définition des flux dans laquelle l'ordre dans lequel on fait le calcul joue un rôle dans la valeur des flux. Ceci est assez peu satisfaisant d'un point de vue mathématique mais dans la pratique les résultats se révèlent dépendre très peu de cet ordre. Par ailleurs, tous les algorithmes non linéaires qui traitent ce genre de problèmes et que nous connaissons sont aussi séquentiels : méthodes de type *reconstruction d'interfaces* comme dans [75, 100] ou *Volume Of Fluid*, [54].

Afin de décrire succinctement le principe de dérivation des contraintes de stabilité, considérons le cas

du transport à vitesse constante  $u > 0$  de trois constituants :

$$\begin{cases} \partial_t c_1 + u \partial_x c_1 = 0, \\ \partial_t c_2 + u \partial_x c_2 = 0, \\ \partial_t c_3 + u \partial_x c_3 = 0, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},$$

satisfaisant à  $c_1(0, x) + c_2(0, x) + c_3(0, x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . L'algorithme s'écrit

$$c_{i_j}^{n+1} = c_{i_j}^n - \lambda \left( c_{i_{j+1/2}}^n - c_{i_{j-1/2}}^n \right), \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, 3\},$$

avec  $\lambda = u \Delta t / \Delta x$ . Vérifier la contrainte  $c_1^n + c_2^n + c_3^n = 1$  pour tout  $(n, j)$  revient à choisir  $c_{3_{j+1/2}}^n = 1 - c_{1_{j+1/2}}^n - c_{2_{j+1/2}}^n$  pour tout  $(n, j)$ . Lors de la détermination de  $c_{1_{j+1/2}}^n$  et  $c_{2_{j+1/2}}^n$ , il faut donc s'assurer, en plus de la stabilité des fractions  $c_1$  et  $c_2$ , de celle de  $c_3$ . Cela peut se faire de la façon très simple suivante. De la même manière que dans le cas à un (ou deux) constituants, on définit, pour chaque constituant, indépendamment, les bornes de stabilité (les notations sont les mêmes qu'aux pages 23 et 26)

$$\begin{aligned} a_{i_{j+1/2}}^n &= \max \left( m_{i_{j+1/2}}^n, M_{i_{j-1/2}}^n + \frac{c_{i_j}^n - M_{i_{j-1/2}}^n}{\lambda} \right), \\ A_{i_{j+1/2}}^n &= \min \left( M_{i_{j+1/2}}^n, m_{i_{j-1/2}}^n + \frac{c_{i_j}^n - m_{i_{j-1/2}}^n}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, 3\}.$$

Ensuite pour le constituant 1 (dont on a décidé de calculer le flux en premier), on définit un nouvel intervalle de stabilité, plus restreint, en tenant compte du fait que les flux des constituants 2 et 3 sont encore inconnus :

$$\begin{aligned} d_{1_{j+1/2}}^n &= \max \left( a_{1_{j+1/2}}^n, 1 - A_{2_{j+1/2}}^n - A_{3_{j+1/2}}^n \right), \\ D_{1_{j+1/2}}^n &= \min \left( A_{1_{j+1/2}}^n, 1 - a_{2_{j+1/2}}^n - a_{3_{j+1/2}}^n \right), \end{aligned} \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$$

On choisit alors  $c_{1_{j+1/2}}^n \in [d_{1_{j+1/2}}^n, D_{1_{j+1/2}}^n]$  (on montre que sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy  $\lambda \in [0, 1]$  cet intervalle n'est pas vide et contient la valeur upwind  $c_{1_j}^n$ , par exemple le plus proche possible de la valeur aval  $c_{1_{j+1}}^n$ ). Pour le deuxième constituant, on utilise la connaissance de  $c_{1_{j+1/2}}^n$  et définit

$$\begin{aligned} d_{2_{j+1/2}}^n &= \max \left( a_{2_{j+1/2}}^n, 1 - c_{1_{j+1/2}}^n - A_{3_{j+1/2}}^n \right), \\ D_{2_{j+1/2}}^n &= \min \left( A_{2_{j+1/2}}^n, 1 - c_{1_{j+1/2}}^n - a_{3_{j+1/2}}^n \right), \end{aligned} \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},$$

et l'on choisit  $c_{2_{j+1/2}}^n \in [d_{2_{j+1/2}}^n, D_{2_{j+1/2}}^n]$  (qui n'est pas vide sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy). Dans [h] on prend la valeur la plus proche de  $c_{2_{j+1}}^n$ . Enfin, comme promis,  $c_{3_{j+1/2}}^n = 1 - c_{1_{j+1/2}}^n - c_{2_{j+1/2}}^n$ . On montre que cela implique la stabilité de  $c_3$ . Cette technique se généralise à un nombre quelconque de constituants. L'algorithme a été utilisé en dimension 3 (avec un splitting directionnel, sur maillage cartésien) au Commissariat à l'Énergie Atomique. Il s'avère efficace et sa formulation simple et locale, qui ne fait pas intervenir de reconstruction d'interface à l'intérieur de chaque maille (opération très délicate et coûteuse, surtout en dimension 3) le rend attractif pour le faible temps de calcul qu'il requiert.

## 2.4 Schémas de reconstruction pour des lois de conservation scalaires en dimension 1

Le schéma décentré aval sous contraintes amont décrit au paragraphe 2.1 n'est pas entropique. Appliqué tel quel, naïvement, à un problème de Cauchy scalaire non linéaire, il ne permet pas d'approcher la solution entropique. Cette application directe est effectuée dans [u]. Dans ce même article, une autre voie est proposée, qui assure l'existence de flux numériques d'entropie (basée sur l'écriture du schéma par demi-maillages comme dans [25]). Hélas les conditions d'entropies qui y sont dérivées sont trop fortes pour permettre un caractère anti-dissipatif du schéma.

On considère ici l'équation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad (2.5)$$

où  $f$  est une fonction régulière. En général, il existe une infinité de solutions faibles d'un problème de Cauchy associé à (2.5), et pour en choisir la solution « physique » on complète (2.5) par les inégalités d'entropie de Kružkov

$$\partial_t |u - \kappa| + \partial_x (\operatorname{sgn}(u - \kappa)(f(u) - f(\kappa))) \leq 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{R}.$$

Le problème de Cauchy est alors bien posé pour toute donnée initiale  $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  (voir [62] et [45, 72]). On cherche à approcher la solution *entropique* de (2.5) au moyen du schéma discret

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n \right), \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad (2.6)$$

où  $\Delta t, \Delta x \in \mathbb{R}_+^*$ . La question est de choisir les flux numériques  $\left( f_{j+1/2}^n \right)_{(n,j)}$  de manière à ce que  $u_j^n$  soit une bonne approximation de  $\int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} u(n\Delta t, x) dx / \Delta x$ , en prenant pour condition initiale discrète  $u_j^0 = \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} u^0(x) dx / \Delta x$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

François Bouchut a proposé dans [12] de nouvelles conditions d'entropie, dans le formalisme décrit au paragraphe 2.1 ci-dessus, c'est-à-dire en trouvant un intervalle de stabilité (incluant la stabilité entropique) pour chaque flux numérique. Cette méthode ne garantit la décroissance que d'une entropie, elle est donc adaptée aux équations scalaires à flux convexe. Elle donne d'excellents résultats : le schéma dérivé est stable, entropique, d'ordre 2, et anti-dissipatif (il permet un calcul exact des chocs isolés).

Dans [j], j'ai proposé une autre approche pour obtenir le même type d'algorithmes, aussi appliqués à des équations convexes, pour la même raison qu'il ne vérifient qu'une seule inégalité d'entropie. Cette méthode consiste à considérer des *schémas de reconstruction*, c'est-à-dire des schémas pouvant être décomposés en trois étapes : la première étape est une reconstruction de la donnée numérique constante par mailles, la deuxième un calcul (exact ou approché) de la solution avec comme donnée initiale la donnée reconstruite (calcul de la solution au temps  $\Delta t$ ), la dernière étape est une « projection » sur le maillage de la solution obtenue (pour réobtenir une donnée constante par mailles). Le principe de dérivation est donc radicalement différent du précédent. Cependant, dans des cas simples (comme le transport à vitesse constante) on montre que les deux approches sont équivalentes.

Voici brièvement de quoi il retourne. Dans [i] je me suis intéressé à des schémas de reconstruction généraux pour les équations scalaires. L'approche y est semblable à celle de [13] et [26] en ce qui concerne les inégalités d'entropie (en particulier, l'idée est de faire décroître non pas l'entropie de la solution projetée mais l'entropie de la solution reconstruite). Concernant la stabilité (le principe du maximum et la décroissance de la variation totale), la « no sawtooth condition » exprimée dans [13] ne permet pas d'obtenir de schéma anti-dissipatif. Les conditions que j'ai proposées dans [i] sont moins restrictives et sont vérifiées par certains schémas anti-dissipatifs. Elles reviennent en quelque sorte à une no sawtooth condition exprimée sur la convolution en espace de la solution reconstruite par la fonction indicatrice d'une maille. Cette condition relaxée est permise par le résultat préliminaire suivant.

*La convolution en espace de la solution entropique d'un problème de Cauchy scalaire par une fonction indicatrice vérifie un principe du maximum local.*

Ce résultat n'est pas totalement trivial. On sait que la solution elle-même vérifie le principe du maximum local  $\inf \operatorname{ess}(u^0) \leq u(t, x) \leq \sup \operatorname{ess}(u^0)$  pour presque tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , donc sa convolution en espace par une fonction  $\xi$  positive d'intégrale unité vérifie aussi  $\inf \operatorname{ess}(u^0) \leq \xi \star u(t, x) \leq \sup \operatorname{ess}(u^0)$ , mais la petite difficulté est de revenir à la convolution de la donnée initiale pour obtenir  $\inf \operatorname{ess}(\xi \star u^0) \leq \xi \star u(t, x) \leq \sup \operatorname{ess}(\xi \star u^0)$ . La démonstration que je propose de ce résultat est basée sur la remarque que la fonction  $\xi \star u$  vérifie une équation de transport. L'utilisation de ce résultat à des fins numériques est assez évidente : elle repose sur le fait que la « projection » d'une fonction sur une maille n'est autre que la valeur, au centre de la maille, de sa convolution par la fonction indicatrice d'une maille (divisée par la longueur de la maille pour normaliser). Soit une donnée numérique constante par mailles. On cherche à lui associer une solution numérique reconstruite de manière à ce qu'après une phase de résolution exacte de l'équation puis de projection, un principe du maximum local soit vérifié. Supposons que la solution reconstruite soit telle que sa convolution par la fonction indicatrice d'une maille (normalisée)

soit localement comprise entre les valeurs minimale et maximale de la solution discrète dans le voisinage de la maille considérée. Alors, le résultat préliminaire assure que ce sera encore le cas après un petit pas de temps  $\Delta t$ . Ce sera donc encore le cas pour la projection de la solution.

Voyons ce que ceci permet de considérer comme opérateurs de reconstruction. Dans un premier temps, focalisons-nous sur l'équation de transport  $\partial_t c + u \partial_x c = 0$  avec  $u > 0$ . On considère des solutions reconstruites ne prenant que deux valeurs différentes dans chaque maille, deux valeurs séparées donc par une discontinuité dont la position  $(j - 1/2 + d_j^n) \Delta x$  à l'intérieur de la maille ( $d_j^n \in [0, 1]$ ) n'est pas fixée. Soit  $(c_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  l'ensemble des valeurs de la solution numérique. Dans la maille  $[(j - 1/2) \Delta x, (j + 1/2) \Delta x]$ , la solution reconstruite  $\mathcal{R}c$  vaut

$$\mathcal{R}c(x) = \begin{cases} c_{j,l}^n & \text{pour } x \in [(j - 1/2) \Delta x, (j - 1/2 + d_j^n) \Delta x[, \\ c_{j,r}^n & \text{pour } x \in [(j - 1/2 + d_j^n) \Delta x, (j + 1/2) \Delta x]. \end{cases}$$

On peut montrer que choisir  $c_{j,l}^n = c_{j-1}^n$  et  $c_{j,r}^n = c_{j+1}^n$  et  $d_j^n = (c_j^n - c_{j,r}^n) / (c_{j,l}^n - c_{j,r}^n)$  (ce choix particulier de  $d_j^n$  assure la conservativité de la phase de reconstruction, il sera systématiquement fait dans la suite) permet de satisfaire aux contraintes de stabilité. Visualisons!

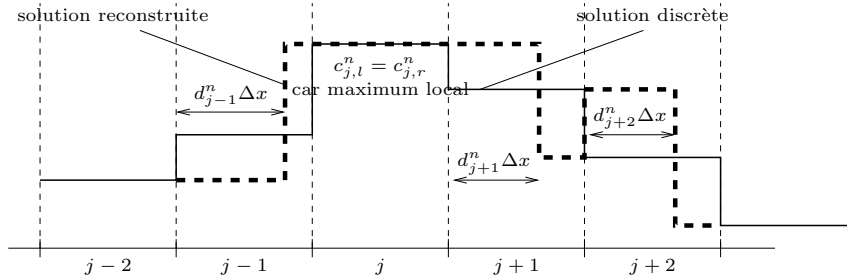


FIG. 2.7 – Une reconstruction discontinue vérifiant les contraintes de stabilité.

On remarque en particulier que la variation totale de la solution reconstruite est strictement supérieure à celle de la solution constante par mailles (observer l'interface  $(j + 3/2) \Delta x$ , en laquelle apparaît une dent de scie (sawtooth)), donc la stabilité du schéma résultant de cette reconstruction n'est pas triviale. On montre dans [j] que le schéma obtenu est équivalent au schéma décentré aval sous contraintes amont du paragraphe 2.1 (et donc au schéma Ultrabee). Par ailleurs, cette reconstruction est exactement celle qui est effectuée pour des fonctions de Heaviside dans l'algorithme Simple Line Interface Calculation (SLIC) de [76], utilisé déjà alors pour advecter des fonctions discontinues... Le choix de reconstruction fait ici n'est bien sûr pas le seul possible. Il donne un schéma qui n'est pas entropique (puisque c'est le schéma décentré aval sous contrainte amont). Mais le formalisme présenté dans ce paragraphe a l'avantage de permettre une dérivation plus facile de conditions sous lesquelles le schéma est entropique. En effet : supposons que l'algorithme utilisé pour la phase de résolution exacte est entropique. Alors il suffit que la reconstruction le soit pour que le schéma global soit entropique. Or trouver des conditions assurant le caractère entropique de la reconstruction est assez aisé puisque l'équation à résoudre n'intervient pas, en d'autres termes on n'a pas ici à chercher des flux numériques d'entropie (c'est l'intérêt d'avoir découplé la reconstruction de la résolution de l'équation). Soit  $S$  une fonction strictement convexe. On cherche à définir  $c_{j,l}^n$  et  $c_{j,r}^n$  de sorte qu'avec  $d_j^n = (c_j^n - c_{j,r}^n) / (c_{j,l}^n - c_{j,r}^n)$  on ait  $d_j^n S(c_{j,l}^n) + (1 - d_j^n) S(c_{j,r}^n) \leq S(c_j^n)$ . Ceci est impossible (la fonction reconstruite a plus de détails que la solution constante par mailles), et c'est pourquoi il faut s'intéresser à l'entropie de la fonction reconstruite et non celle de la solution discrète constante par mailles. On demande donc que la reconstruction satisfasse à  $d_j^n S(c_{j,l}^n) + (1 - d_j^n) S(c_{j,r}^n) \leq S_j^n$ , où  $S_j^n$  n'est pas l'entropie de  $c_j^n$  mais l'entropie de la solution *avant* la phase de projection qui a conduit à  $c_j^n$ . Ceci impose de calculer cette entropie (ou une valeur approchée) avant projection, à chaque pas de temps. Remarquons que le schéma de François Bouchut nécessite aussi un calcul de l'entropie en parallèle du calcul de l'inconnue principale  $c$ . Nous n'entrerons pas ici dans les détails de ce calcul ni de celui des valeurs  $c_{j,l}^n$  et  $c_{j,r}^n$ . Les conditions de stabilité et d'entropie obtenues permettent le choix de divers algorithmes anti-dissipatifs (permettant un calcul exact des chocs purs) : deux exemples sont décrits avec précision dans [j].

## 2.5 Schémas de reconstruction pour le calcul de solutions non classiques avec fonction cinétique donnée

Ici je résume (dans un cadre simplifié) un travail effectué avec Benjamin Boutin, Christophe Chalons et Philippe G. LeFloch : [k]. Nous nous y intéressons au problème de l'approximation des solutions non classiques de l'équation (2.5) où  $f$  est un flux ni convexe ni concave. Les solutions non classiques sont des solutions faibles de l'équation qui ne satisfont pas à toutes les inégalités de Kružkov (mais en général à l'une de ces inégalités) : voir [67] pour leur étude générale. En conséquence, leur unicité sans condition supplémentaire n'est pas garantie. La méthode que nous avons développée est pour l'instant adaptée au cas d'un flux concave-convexe croissant. Pour simplifier le présent exposé, considérons le flux concave-convexe  $f(u) = u^3 + u$ . La définition des solutions admissibles peut se faire au moyen d'une *fonction cinétique*, c'est-à-dire en se donnant une fonction  $\varphi^b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et en imposant aux solutions faibles discontinues (non classiques)  $(u_G, u_D, \sigma)$  (avec des notations standard) de vérifier, en plus de la relation de Rankine-Hugoniot  $f(u_D) - f(u_G) = \sigma(u_D - u_G)$ , la relation cinétique  $u_D = \varphi^b(u_G)$ . On se restreint encore au cas où il existe  $\alpha \in [1/2, 1]$  tel que  $\varphi^b(u) = -\alpha u$ . Le problème de Cauchy pour (2.5) est alors bien posé pour toute donnée initiale dans  $BV(\mathbb{R})$ , voir [67]. En ce qui concerne le problème de Riemann avec données  $u_l$  pour  $x < 0$  et  $u_r$  pour  $x > 0$ , la solution en est

si  $u_l > 0$ ,

- (1) si  $u_r \geq u_l$ , une onde de détente liant  $u_l$  à  $u_r$ ,
- (2) si  $u_r \in [-u_l/2, u_l[$ , un choc classique liant  $u_l$  à  $u_r$ ,
- (3) si  $u_r \in ]\varphi^b(u_l), -u_l/2[$ , un choc non classique liant  $u_l$  à  $\varphi^b(u_l)$  suivi d'un choc classique liant  $\varphi^b(u_l)$  à  $u_r$ ,
- (4) si  $u_r \leq \varphi^b(u_l)$ , un choc non classique liant  $u_l$  à  $\varphi^b(u_l)$  suivi d'une détente liant  $\varphi^b(u_l)$  à  $u_r$ ,

et si  $u_l \leq 0$  :

- (1) si  $u_r \leq u_l$ , une détente liant  $u_l$  à  $u_r$ ,
- (2) si  $u_r \in [u_l, -u_l/2[$ , un choc classique liant  $u_l$  à  $u_r$ ,
- (3) si  $u_r \in ]-u_l/2, \varphi^b(u_l)[$ , un choc non classique liant  $u_l$  à  $\varphi^b(u_l)$  suivi d'un choc classique liant  $\varphi^b(u_l)$  à  $u_r$ ,
- (4) si  $u_r \geq \varphi^b(u_l)$ , un choc non classique liant  $u_l$  à  $\varphi^b(u_l)$  suivi d'une détente liant  $\varphi^b(u_l)$  à  $u_r$ .

L'approximation numérique de ces solutions se révèle très difficile. Une explication heuristique est fournie par le fait que les solutions non classiques définies par le biais de relations cinétiques peuvent être approchées par les solutions d'une équation de diffusion-dispersion

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = \varepsilon \partial_{x,x}^2 u + \delta \partial_{x,x,x}^3 u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},$$

lorsque  $\varepsilon$  et  $\delta$  tendent *conjointement* vers 0 (voir [67]), et la relation cinétique est fonction des vitesses relatives de convergence vers 0 de  $\varepsilon$  et  $\delta$ . Or (presque) tout schéma numérique possède sa propre viscosité numérique et sa propre dispersion numérique. Donc le schéma numérique possède lui-même sa relation cinétique équivalente. Par exemple, on constate assez facilement (voir [k]) que la solution donnée par le schéma de Godunov non classique, obtenu en résolvant en chaque interface de mailles les problèmes de Riemann non classiques dont la solution est donnée ci-dessus, converge vers la solution classique (entropique au sens de Kružkov) du problème.

À notre connaissance, les seuls schémas convergents vers la solution non classique désirée sont le schéma de Glimm (qui n'introduit aucune diffusion ni dispersion numériques, voir [21]), ou du moins des algorithmes dans lesquels intervient une variable aléatoire (voir [18]). Des approches conservatives et déterministes ont été tentées ([19, 20, 51, 52, 68]) mais, si elles améliorent grandement la précision des résultats, elles ne permettent pas d'obtenir un schéma *convergent* vers une solution non classique.

Les schémas de reconstruction discontinue anti-dissipatifs ont la propriété de transporter de manière exacte les chocs purs : on peut espérer en tirer parti pour le calcul des chocs non classiques. On a raison d'espérer. L'idée de base est de trouver un algorithme de reconstruction qui détecte la situation où la donnée numérique est la projection sur le maillage d'un choc non classique pur. Considérons une donnée de Riemann

$$u^0(x) = \begin{cases} u_l < 0 & \text{si } x < -\Delta x/2, \\ u_r = \varphi^b(u_l) > -u_l/2 & \text{si } x > -\Delta x/2. \end{cases}$$

La solution non classique est alors  $u(t, x) = u^0(x - \sigma t)$  avec  $\sigma = (f(u_r) - f(u_l)) / (u_r - u_l)$ . La condition initiale associée est  $u_j^0 = u_l$  pour  $j \leq 0$ ,  $u_j^0 = u_r$  pour  $j > 0$ . Après un pas de temps  $\Delta t$  tel que  $\sigma \Delta t < \Delta x$ , la solution donnée par le schéma de Godunov (solution non classique exacte projetée sur le maillage) est

$$u_j^1 = \begin{cases} u_l & \text{pour } j < 0, \\ (\sigma \Delta t / \Delta x) u_l + (1 - \sigma \Delta t / \Delta x) u_r & \text{pour } j = 0, \\ u_r & \text{pour } j > 0. \end{cases}$$

La structure du choc non classique a été perdue et aux pas de temps suivants une solution classique va se dégager. Cependant on comprend que si l'on reconstruit la solution dans la maille  $[-\Delta x/2, \Delta x/2[$  afin de récupérer la discontinuité, celle-ci pourra être à nouveau translatée à la vitesse  $\sigma$ . Bien sûr il faut un principe de reconstruction général (applicable dans toute configuration) qui, dans ce cas précis d'un choc non classique étalé sur une maille, permette de détecter le choc non classique exact et sa position dans la maille. Dans [k] nous avons opté pour l'algorithme suivant (il en existe de multiples variantes possibles). On note  $\varphi^{-b}$  l'inverse de  $\varphi^b$ . Pour la maille  $[(j - 1/2)\Delta x, (j + 1/2)\Delta x[$  : si  $u_j^n$  est une combinaison convexe de  $\varphi^{-b}(u_{j+1}^n)$  et de  $\varphi^b(u_{j-1}^n)$ , c'est-à-dire s'il existe  $d_j^n \in [0, 1]$  tel que  $u_j^n = d_j^n \varphi^{-b}(u_{j+1}^n) + (1 - d_j^n) \varphi^b(u_{j-1}^n)$ , à la manière de ce que l'on a fait dans le paragraphe précédent, on remplace, dans la maille  $[(j - 1/2)\Delta x, (j + 1/2)\Delta x[$ , la donnée constante  $u_j^n$  par la fonction

$$\varphi^{-b}(u_{j+1}^n) \mathbb{1}_{[(j-1/2)\Delta x, (j-1/2+d_j^n)\Delta x[}(x) + \varphi^b(u_{j-1}^n) \mathbb{1}_{[(j-1/2+d_j^n)\Delta x, (j+1/2)\Delta x[}(x).$$

(Si  $u_j^n$  n'est pas une telle combinaison convexe, aucune reconstruction n'est faite.) On vérifie sans peine que dans le cas où  $u_{j+1}^n = \varphi^b(u_{j-1}^n)$  cela permet de placer le choc non classique liant  $u_{j-1}^n$  à  $u_{j+1}^n$  à l'intérieur de la maille  $[(j - 1/2)\Delta x, (j + 1/2)\Delta x[$ , comme requis. Une fois cette reconstruction opérée, le calcul du flux  $f_{j+1/2}^n$  est effectué en calculant une solution approchée de l'équation avec la fonction reconstruite comme donnée initiale (localement) : en déplaçant, le cas échéant, la discontinuité interne à la maille  $[(j - 1/2)\Delta x, (j + 1/2)\Delta x[$  à la vitesse  $\sigma = (f(\varphi^b(u_{j-1}^n)) - f(\varphi^{-b}(u_{j+1}^n))) / (\varphi^b(u_{j-1}^n) - \varphi^{-b}(u_{j+1}^n))$ . Les détails seront trouvés dans [k].

Dans cet article on démontre que le schéma ainsi obtenu est consistant et qu'il permet un calcul exact des chocs non classiques isolés. Les résultats numériques sont très encourageants car ils indiquent la convergence de l'algorithme vers les solutions non classiques attendues (avec les relations cinétiques prescrites), ce qui semble être une première. Nous travaillons actuellement à la démonstration de la convergence de l'algorithme ainsi qu'à son extension au cas d'un système  $2 \times 2$ , un  $p$ -système modélisant le comportement de certains matériaux élastiques.

## 2.6 Schémas de reconstruction pour l'advection en dimension 2, puis pour le transport de constituants en dimension quelconque

L'algorithme de transport anti-dissipatif décentré aval sous contraintes amont dérivé en dimension 1 a été étendu dans [f] au transport et aux équations d'Euler de la dynamique des gaz compressibles en dimension 2, et dans [g, h] au transport de constituants en dimensions 2 et 3 par une méthode de splitting directionnel sur des maillages cartésiens.

Dans un domaine de géométrie complexe, on hésite à utiliser des maillages cartésiens car leurs bords coïncident relativement mal avec les bords du domaine. On est dans ce cas amené à privilégier des algorithmes fonctionnant sur des maillages quelconques, ce qui exclut à peu près les algorithmes mono-dimensionnels tensorisés. Une autre application des schémas de transport vraiment multi-dimensionnels est la résolution des équations d'Euler en coordonnées lagrangiennes. Ceci est paradoxal car le passage en coordonnées lagrangiennes a pour but d'éviter les termes de transport dans les équations. Ces algorithmes sont basés sur un transport du maillage à la vitesse (calculée) du fluide, et dans de nombreuses applications (par exemple les calculs d'instabilités hydrodynamiques), ceci induit une torsion du maillage ; en général rien ne s'oppose même à ce que des points du maillage se croisent en temps fini (et alors le calcul s'arrête vite, en particulier parce que des mailles de surface négative apparaissent). On est donc contraint



de remailler régulièrement les maillages lagrangiens (cette opération s'appelle remaillage, projection, rezoning...). Le remaillage, qui est une projection sur un maillage ayant de meilleures propriétés, peut se formuler comme une phase de transport dont la vitesse est une fonction de l'ancien et du nouveau maillage (de ce point de vue, un algorithme Lagrange-projection est un algorithme lagrangien avec rezoning à chaque étape, à chaque étape sur le maillage initial). Pour les algorithmes lagrangiens, on peut se référer aux articles récents [35] et [71]. Concernant les techniques de rezoning, voir par exemple [x] (qui ne sera pas résumé dans ce mémoire) et les références qui y sont citées. Pour certaines applications, le nombre d'étapes de rezoning est important, ce qui rend primordiale l'utilisation d'un rezoning anti-dissipatif, c'est-à-dire d'un algorithme de transport anti-dissipatif. Avec Bruno Després et Emmanuel Labourasse, nous avons développé un tel algorithme adapté à des maillages quelconques (enfin... Non forcément cartésiens). Ils sont basés sur la reconstruction discontinue de [j]. Cet algorithme a été décrit en dimension 2 dans [l] et appliqué à un algorithme Lagrange + rezoning pour la dynamique des gaz tridimensionnelle dans [m].

J'en donne ici une description sommaire dans le cas de l'équation de transport à vitesse constante  $u \in \mathbb{R}^2$  en dimension 2

$$\partial_t c + u \cdot \nabla c = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2.$$

L'idée de la reconstruction bidimensionnelle que nous utilisons part de la constatation suivante. Le phénomène de diffusion numérique est plus complexe en dimension 2 qu'en dimension 1, et peut être décomposé en deux types de diffusion distincts. La figure 2.8 montre des résultats numériques obtenus avec le schéma upwind sur un maillage cartésien composé de  $30 \times 30$  mailles au temps  $t = 1$  (avec des conditions périodiques).

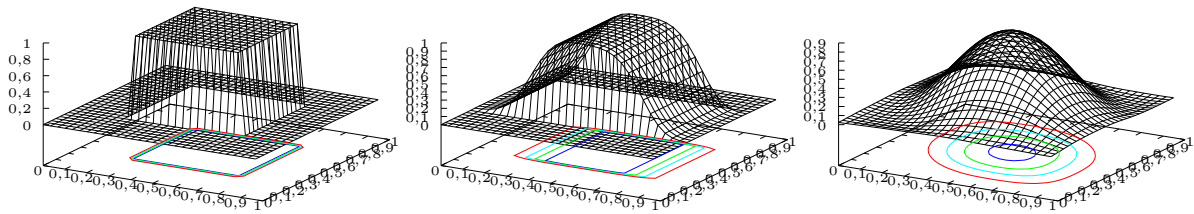


FIG. 2.8 – Condition initiale, et solutions avec champ de vitesse  $(1, 0)^T$  puis  $(1, 1)^T$ .

On constate que les résultats numériques dépendent beaucoup de la direction de la vitesse relativement aux directions principales du maillage. Plus précisément, ces résultats suggèrent de dissocier la diffusion numérique en deux phénomènes distincts : la diffusion numérique longitudinale (dans la direction de la vitesse, c'est la diffusion mono-dimensionnelle) et la diffusion numérique transverse (orthogonale à la vitesse, due au fait que le maillage n'est pas aligné avec  $u$  : c'est là que réside le caractère vraiment multi-dimensionnel de la diffusion numérique). L'algorithme que nous proposons est basé sur la distinction de ces deux phénomènes. Il comporte une phase de reconstruction transverse (pour s'opposer à la diffusion transverse, multi-dimensionnelle) et une phase de reconstruction longitudinale (plus mono-dimensionnelle). L'originalité de ce travail réside essentiellement dans la reconstruction transverse. Voici son principe. On se concentre sur le cas d'un maillage composé de triangles (le cas général est exposé dans [l, m]). On utilise les notations du paragraphe 1.5. Comme les mailles sont des triangles, toute maille  $\Omega_j$  a un ou deux voisin(s) sortant(s) (et un ou deux voisin(s) entrant(s)) : figure 2.9.

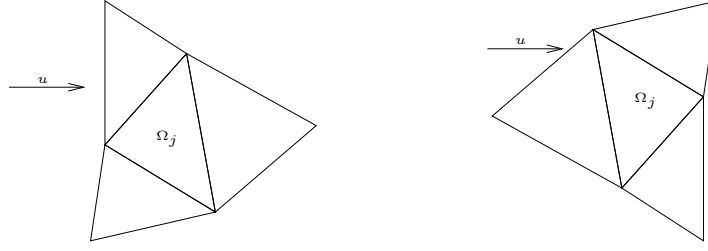


FIG. 2.9 – La maille  $\Omega_j$  a un voisin sortant dans la configuration de gauche, deux voisins sortants dans celle de droite.

Le cas le plus simple est celui d'une maille ayant un voisin sortant (à gauche sur la figure 2.9). Il est clair qu'une maille qui n'a qu'un voisin sortant n'introduit pas de diffusion transverse : elle concentre l'« information » arrivant de ses deux voisins entrants et ne la diffuse pas ensuite. En revanche, la maille ayant deux voisins sortants diffuse l'information dans ces deux voisins. Pour cette raison (heuristique !), l'algorithme de reconstruction transverse n'opérera que dans les mailles ayant deux voisins sortants. À la manière de l'algorithme de reconstruction discontinue en dimension 1, il repose sur la définition d'une fonction prenant deux valeurs distinctes (si possible) à l'intérieur de cette maille. À sa différence cependant, le lieu de la discontinuité séparant ces deux valeurs n'est pas laissé libre. Il est déterminé par la géométrie du problème : on place la discontinuité sur la droite parallèle à la vitesse passant par le point d'intersection des deux bords sortants (figure 2.10). Notons  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  les deux voisins sortants de  $\Omega_j$ . Cette opération revient à découper  $\Omega_j$  en deux sous-maillles  $\Omega_{j,k}$  et  $\Omega_{j,l}$  et à affecter à chacune d'elles une valeur de l'inconnue  $c^n$  reconstruite ; les valeurs sont notées  $c_{j,k}^n$  et  $c_{j,l}^n$ .

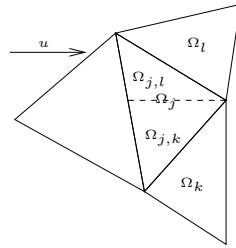


FIG. 2.10 – Découpage de la maille  $\Omega_j$  en deux sous-maillles  $\Omega_{j,k}$  et  $\Omega_{j,l}$ .

Pour déterminer les valeurs  $c_{j,k}^n$  et  $c_{j,l}^n$ , nous avons adopté la même stratégie jusqu'au-boutiste qu'en dimension 1, qui correspond à rapprocher au maximum  $c_{j,k}^n$  de  $c_k^n$  et  $c_{j,l}^n$  de  $c_l^n$ , sous des contraintes de stabilité et de conservation : notant  $s_{j,k}$  et  $s_{j,l}$  les surfaces de  $\Omega_{j,k}$  et  $\Omega_{j,l}$ , on impose  $s_{j,k}c_{j,k}^n + s_{j,l}c_{j,l}^n = s_j c_j^n$  (conservativité de la reconstruction) et que le quadruplet  $(c_k^n, c_{j,k}^n, c_{j,l}^n, c_l^n)$  ait la même monotonie que le triplet  $(c_k^n, c_j^n, c_l^n)$  (propriété de stabilité). En particulier si ce dernier triplet n'est pas monotone (en gros, si  $c_j^n$  est un extremum local dans la direction orthogonale à la vitesse) on n'effectue pas de reconstruction, *i.e.*  $c_{j,k}^n = c_{j,l}^n = c_j^n$ . On vérifie sans peine que cette stratégie conduit à l'algorithme<sup>4</sup>

si  $c_j^n \notin [c_k^n, c_l^n]$  ,

$$c_{j,l}^n = c_{j,k}^n = c_j^n ;$$

si  $c_j^n \in [c_k^n, c_l^n]$  ,  
– on prend

$$\begin{cases} c_{j,l}^n = c_l^n, \\ c_{j,k}^n = (s_j c_j^n - s_{j,l} c_l^n) / s_{j,k} \end{cases} \quad \text{si } (s_j c_j^n - s_{j,l} c_l^n) / s_{j,k} \in [c_j^n, c_k^n],$$

<sup>4</sup>Notation : pour  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $[a, b]$  est  $[a, b]$  si  $a \leq b$ ,  $[b, a]$  sinon.

– et on prend

$$\begin{cases} c_{j,l}^n = (s_j c_j^n - s_{j,k} c_k^n) / s_{j,l}, & \text{si } (s_j c_j^n - s_{j,k} c_k^n) / s_{j,l} \in [c_l^n, c_j^n]. \\ c_{j,k}^n = c_k^n \end{cases}$$

Le fait de découper la maille  $\Omega_j$  par ce segment parallèle à la vitesse a deux avantages. Le premier est que ceci ne modifie pas la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (locale)

$$\Delta t (l_{j,k}(u \cdot n_{j,k}) + l_{j,l}(u \cdot n_{j,l})) \leq s_j,$$

car cette condition est équivalente à  $\Delta t l_{j,k}(u \cdot n_{j,k}) \leq s_{j,k}$  (condition de stabilité pour la maille  $\Omega_{j,k}$ ) et aussi à  $\Delta t l_{j,l}(u \cdot n_{j,l}) \leq s_{j,l}$  (condition de stabilité pour la maille  $\Omega_{j,l}$ ). En effet on a  $l_{j,k}(u \cdot n_{j,k}) / s_{j,k} = l_{j,l}(u \cdot n_{j,l}) / s_{j,l}$  (conséquence du théorème de Thalès ou d'une formule de Green). Le second avantage de ce découpage est tout aussi important : les deux nouvelles sous-mailles ont maintenant la propriété de n'avoir qu'un voisin entrant et un voisin sortant (puisque le segment les séparant est parallèle à la vitesse, le flux sur ce segment est nul). La situation est donc désormais mono-dimensionnelle, ce qui signifie que l'on peut utiliser le schéma anti-dissipatif de notre choix, par exemple le schéma décentré aval sous contraintes amont du paragraphe 2.1, c'est-à-dire le schéma de reconstruction discontinue du paragraphe 2.4. C'est ce que nous avons fait dans [l, m]. Dans ces références nous donnons aussi une version algébrique de cette reconstruction géométrique. La version algébrique permet de traiter les cas de mailles de formes arbitraires (pas seulement triangulaires) et de vitesses de transport non constantes. L'algorithme obtenu donne des résultats très satisfaisants pour le transport de fonctions discontinues. Incorporé en tant que procédure de rezoning<sup>5</sup> dans un algorithme lagrangien, il permet de faire des calculs tridimensionnels lagrangiens multi-matériaux de manière efficace et peu coûteuse. Voici un résultat numérique (calcul effectué au Commissariat à l'Énergie Atomique de Bruyères-le-Châtel). Il s'agit d'un calcul d'instabilité de type Richtmyer-Meshkov (du même type donc qu'au paragraphe 2.3). On résout les équations d'Euler à trois constituants gaz parfaits (avec les mêmes lois de pression pour tous,  $p = (\gamma - 1)\rho(e - u^2/2)$  avec  $\gamma = 1, 4$ ) séparés par des interfaces présentant un point triple (point de contact entre les trois constituants) en  $(3/10, 1/8, 1/8)$ . Le domaine de calcul est  $[0, 1] \times [0, 1/4] \times [0, 1/4]$ . Les données initiales sont

$$(\rho, u, p, c_1, c_2, c_3) = \begin{cases} (1, (0, 0, 0), 1, 1, 0, 0) & \text{pour } x \leq 3/10, \\ (1, (0, 0, 0), 1/10, 0, 1, 0) & \text{pour } x \geq 3/10, y \leq 1/8 \text{ et } z \leq 1/8, \\ (1/8, (0, 0, 0), 1/10, 0, 0, 1) & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Un choc se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants est créé instantanément en  $x = 3/10$  et puisque la vitesse de déplacement de ce choc (qui dépend de la densité) n'est pas homogène en  $(y, z)$ , cela induit une différence de pression le long de la surface séparant les matériaux 2 et 3 (pour  $x \geq 3/10$ , en  $y = 1/8$  ou  $z = 1/8$ ), qui résulte en un déplacement de cette interface et en son enroulement. Voici le maillage initial (figure 2.11, les couleurs ou les nuances de gris permettent de visualiser les discontinuités des données initiales) et le résultat obtenu au temps  $t = 0, 4$  avec le schéma lagrangien avec rezoning et algorithme de reconstruction discontinue, figure 2.12.

<sup>5</sup>La procédure de rezoning est un remaillage local lorsque le maillage est considéré comme mauvais. L'évaluation de la qualité du maillage et l'amélioration de celle-ci sont un travail en soi et sont l'objet de recherches continues : voir [36, 63, 70, x]. Ici, nous utilisons un algorithme de Tipton-Jun, issu de [61, 90].

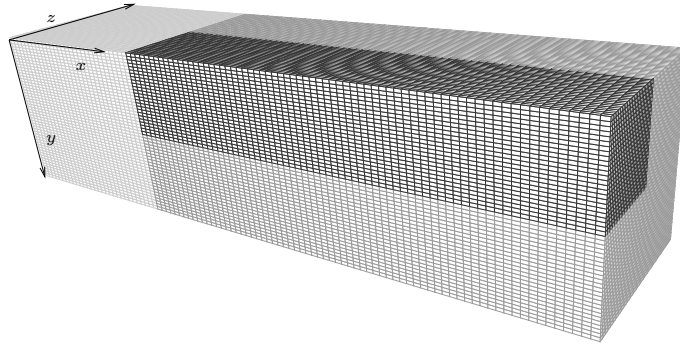


FIG. 2.11 – Maillage initial.

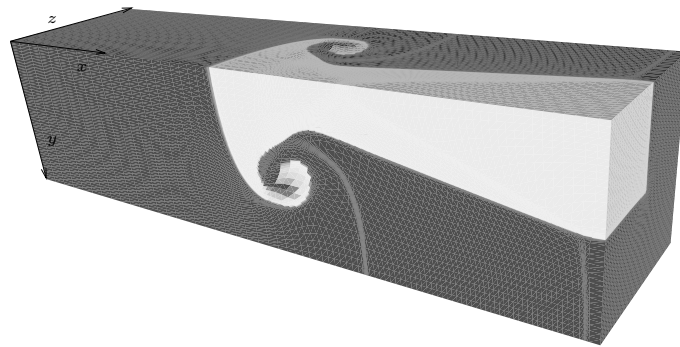


FIG. 2.12 – Fractions massiques au temps final.

# Bibliographie

## [Publications et articles soumis de l'auteur]

- [a] Bruno Després, Frédéric Lagoutière et David Ramos, Stability of a thermodynamically coherent multiphase model. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 13 (2003), n° 10, p. 1463–1487.
- [b] Frédéric Lagoutière, Nicolas Seguin et Takéo Takahashi, A simple 1D model of inviscid fluid-solid interaction. À paraître dans *J. Differential Equations*.
- [c] François Delarue et Frédéric Lagoutière, Probabilistic analysis of the upwind scheme for transport. Accepté pour publication dans *Arch. Ration. Mech. Anal.*
- [d] Frédéric Lagoutière, Large time behavior of numerical solutions of scalar conservation laws. *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 3 (2006), n° 4, p. 631–648.
- [e] Bruno Després et Frédéric Lagoutière, Generalized Harten formalism and longitudinal variation diminishing schemes for linear advection on arbitrary grids. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 35 (2001), n° 6, p. 1159–1183.
- [f] Bruno Després et Frédéric Lagoutière, Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics. *J. Sci. Comput.* 16 (2001), n° 4, p. 479–524 (2002).
- [g] Bruno Després et Frédéric Lagoutière, Numerical resolution of a two-component compressible fluid model with interfaces. *Prog. Comput. Fluid Dyn.* 7 (2007), n° 6, p. 295–310.
- [h] Stéphane Jaouen et Frédéric Lagoutière, Numerical transport of an arbitrary number of components. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196 (2007), n° 33-34, p. 3127–3140.
- [i] Frédéric Lagoutière, Stability of reconstruction schemes for scalar hyperbolic conservation laws. *Commun. Math. Sci.* 6 (2008), n° 1, p. 57–70.
- [j] Frédéric Lagoutière, Non-dissipative entropy satisfying discontinuous reconstruction schemes for hyperbolic conservation laws. Soumis.
- [k] Christophe Chalons, Benjamin Boutin, Frédéric Lagoutière et Philippe G. LeFloch, Convergent and conservative schemes for nonclassical solutions based on kinetic relations. À paraître dans *Interfaces Free Bound.*
- [l] Bruno Després et Frédéric Lagoutière, Genuinely multi-dimensional non-dissipative finite-volume schemes for transport. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 17 (2007), n° 3, p. 321–328.
- [m] Bruno Després, Emmanuel Labourasse et Frédéric Lagoutière, An antidissipative transport scheme on unstructured meshes for multicomponent flows. Soumis.
- [n] Annalisa Ambroso, Christophe Chalons, Frédéric Coquel, Edwige Godlewski, Frédéric Lagoutière, Pierre-Arnaud Raviart et Nicolas Seguin, Coupling of general Lagrangian systems. *Math. Comp.* 77 (2008), n° 262, p. 909–941.
- [o] Annalisa Ambroso, Christophe Chalons, Frédéric Coquel, Edwige Godlewski, Frédéric Lagoutière, Pierre-Arnaud Raviart et Nicolas Seguin, Extension of interface coupling to general Lagrangian systems. *Numerical mathematics and advanced applications*, p. 852–860, Springer, Berlin (2006).
- [p] Annalisa Ambroso, Christophe Chalons, Frédéric Coquel, Edwige Godlewski, Frédéric Lagoutière, Pierre-Arnaud Raviart et Nicolas Seguin, The coupling of homogeneous models for two-phase flows. *Int. J. Finite Volumes* 4 (2007) n° 1, p. 1–39.

- [q] Céline Baranger, Gérard Baudin, Laurent Boudin, Bruno Després, Frédéric Lagoutière, Emmanuel Lapébie et Takéo Takahashi, Liquid jet generation and break-up. Numerical methods for hyperbolic and kinetic problems (actes du CEMRACS 2003), p. 149–176, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. 7, Eur. Math. Soc., Zürich (2005).
- [r] Étienne Bernard, Stéphane Del Pino, Erwan Deriaz, Bruno Després, Katerina Jurkova et Frédéric Lagoutière, Lagrangian method enhanced with edge swapping for the free fall and contact problem. À paraître dans les actes du CEMRACS 2007.
- [s] Bruno Després et Frédéric Lagoutière, Un schéma non linéaire anti-dissipatif pour l'équation d'advection linéaire. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), n° 10, p. 939–944.
- [t] Bruno Després et Frédéric Lagoutière, A longitudinal variation diminishing estimate for linear advection on arbitrary grids. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 332 (2001), n° 3, p. 259–263.
- [u] Frédéric Lagoutière, Numerical resolution of scalar convex equations: explicit stability, entropy and convergence conditions. CEMRACS 1999 (Orsay), p. 183–199 (electronic), ESAIM Proc., 10, Soc. Math. Appl. Indust., Paris (1999).
- [v] Frédéric Lagoutière, **Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides compressibles à plusieurs constituants**. Thèse de doctorat de l'Université Paris6 Pierre et Marie Curie (2000).
- [w] Frédéric Lagoutière, A non-dissipative entropic (*sic*) scheme for convex scalar equations via discontinuous cell-reconstruction. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004), n° 7, p. 549–554.
- [x] Pierre-Henri Maire, Aaron Diaz, Maya De Buhan, Cécile Dobrzynski, Gilles Kluth et Frédéric Lagoutière, A cell-centered arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) method for multimaterial compressible flows. À paraître dans les actes du CEMRACS 2007.

#### [Autres références bibliographiques]

- [1] Grégoire Allaire, Sébastien Clerc et Samuel Kokh, A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids. J. Comput. Phys. 181 (2002), n° 2, p. 577–616.
- [2] François Alouges, Florian De Vuyst, Gérard Le Coq et Emmanuel Lorin, Un procédé de réduction de la diffusion numérique des schémas à différence de flux d'ordre un pour les systèmes hyperboliques non linéaires. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 335 (2002), n° 7, p. 627–632.
- [3] François Alouges, Gérard Le Coq et Emmanuel Lorin, Two-dimensional extension of the reservoir technique for some linear advection systems. J. Sci. Comput. 31 (2007), n° 3, p. 419–458.
- [4] Melvin R. Baer et Jace W. Nunziato, A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. Int. J. Multiphase Flow 12 (1986), p. 861–889.
- [5] Céline Baranger et Laurent Desvillettes, Coupling Euler and Vlasov equations in the context of sprays: the local-in-time, classical solutions. J. Hyperbolic Differ. Equ. 3 (2006), n° 1, p. 1–26.
- [6] Michaël Baudin, Christophe Berthon, Frédéric Coquel, Roland Masson et Quang Huy Tran, A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law. Numer. Math. 99 (2005), n° 3, p. 411–440.
- [7] Sylvie Benzoni-Gavage, **Analyse numérique des modèles hydrodynamiques d'écoulements diphasiques instationnaires dans les réseaux de production pétrolière**. Thèse de doctorat de l'Université Lyon-I (1991).
- [8] Fabienne Bézard et Bruno Després, An entropic solver for ideal Lagrangian magnetohydrodynamics. J. Comput. Phys. 154 (1999), n° 1, p. 65–89.
- [9] Olivier Bokanowski, Sophie Martin, Rémi Munos et Hasnaa Zidani, An anti-diffusive scheme for viability problems. Appl. Numer. Math. 56 (2006), n° 9, p. 1147–1162.
- [10] Olivier Bokanowski et Hasnaa Zidani, Anti-dissipative schemes for advection and application to Hamilton-Jacobi-Bellmann equations. J. Sci. Comput. 30 (2007), n° 1, p. 1–33.

- [11] Daniel Bouche, Jean-Michel Ghidaglia et Frédéric Pascal, Error estimate and the geometric corrector for the upwind finite volume method applied to the linear advection equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 43 (2005), n° 2, p. 578–603.
- [12] François Bouchut, An antidiffusive entropy scheme for monotone scalar conservation laws. *J. Sci. Comput.* 21 (2004), n° 1, p. 1–30.
- [13] François Bouchut, Christian Bourdarias et Benoît Perthame, A MUSCL method satisfying all the numerical entropy inequalities. *Math. Comp.* 65 (1996), n° 216, p. 1439–1461.
- [14] François Bouchut et Benoît Perthame, Kružkov’s estimates for scalar conservation laws revisited. *Trans. Amer. Math. Soc.* 350 (1998), n° 7, p. 2847–2870.
- [15] Yann Brenier, Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), n° 6, p. 1013–1037.
- [16] José Antonio Carrillo et Thierry Goudon, Stability and asymptotic analysis of a fluid-particle interaction model. *Comm. Partial Differential Equations* 31 (2006), n° 7-9, p. 1349–1379.
- [17] Claire Chainais-Hillairet, Finite volume schemes for a nonlinear hyperbolic equation. Convergence towards the entropy solution and error estimate. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 33 (1999), n° 1, p. 129–156.
- [18] Christophe Chalons, Transport-Equilibrium Schemes for Computing Nonclassical Shocks. *Scalar Conservation Laws. Numer. Methods Partial Differential Equations* 24 (2008), n° 4, p. 1127–1147.
- [19] Christophe Chalons et Philippe G. LeFloch, High-order entropy-conservative schemes and kinetic relations for van der Waals fluids. *J. Comput. Phys.* 168 (2001), n° 1, p. 184–206.
- [20] Christophe Chalons et Philippe G. LeFloch, A fully discrete scheme for diffusive-dispersive conservation laws. *Numer. Math.* 89 (2001), n° 3, p. 493–509.
- [21] Christophe Chalons et Philippe G. LeFloch, Computing undercompressive waves with the random choice scheme. *Nonclassical shock waves. Interfaces Free Bound.* 5 (2003), n° 2, p. 129–158.
- [22] Kuo Shung Cheng, Asymptotic behavior of solutions of a conservation law without convexity conditions. *J. Differential Equations* 40 (1981), n° 3, p. 343–376.
- [23] Kuo Shung Cheng, Decay rate of periodic solutions for a conservation law. *J. Differential Equations* 42 (1981), n° 3, p. 390–399.
- [24] Bernardo Cockburn, Frédéric Coquel et Philippe G. LeFloch, An error estimate for finite volume methods for multidimensional conservation laws. *Math. Comp.* 63 (1994), n° 207, p. 77–103.
- [25] Frédéric Coquel et Philippe G. LeFloch, Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: the corrected antidiffusive flux approach. *Math. Comp.* 57 (1991), n° 195, p. 169–210.
- [26] Frédéric Coquel et Philippe G. LeFloch, An entropy satisfying MUSCL scheme for systems of conservation laws. *Numer. Math.* 74 (1996), n° 1, p. 1–33.
- [27] Constantine M. Dafermos, Applications of the invariance principle for compact processes. II. Asymptotic behavior of solutions of a hyperbolic conservation law. *J. Differential Equations* 11 (1972), p. 416–424.
- [28] Constantine M. Dafermos, Regularity and large time behaviour of solutions of a conservation law without convexity. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 99 (1985), n° 3-4, p. 201–239.
- [29] Stéphane Dellacherie, Numerical resolution of a potential diphasic low Mach number system. *J. Comput. Phys.* 223 (2007), n° 1, p. 151–187.
- [30] Bruno Després, Inégalité entropique pour un solveur conservatif du système de la dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 324 (1997), n° 11, p. 1301–1306.
- [31] Bruno Després, Lagrangian systems of conservation laws. Invariance properties of Lagrangian systems of conservation laws, approximate Riemann solvers and the entropy condition. *Numer. Math.* 89 (2001), n° 1, p. 99–134.
- [32] Bruno Després, Conservation laws for compressible multiphase flows with shocks. Preprint du laboratoire Jacques-Louis Lions (2001).

- [33] Bruno Després, An explicit *a priori* estimate for a finite volume approximation of linear advection on non-Cartesian grids. *SIAM J. Numer. Anal.* 42 (2004), n° 2, p. 484–504.
- [34] Bruno Després, Stéphane Jaouen, Constant Mazeran et Takéo Takahashi, Numerical study of a conservative bifluid model with interpenetration. Numerical methods for hyperbolic and kinetic problems (actes du CEMRACS 2003), p. 177–207, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 7, Eur. Math. Soc., Zürich (2005).
- [35] Bruno Després et Constant Mazeran, Lagrangian gas dynamics in two dimensions and Lagrangian systems. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 178 (2005), n° 3, p. 327–372.
- [36] Amir Ali Feiz, Philippe Hoch, Sandrine Marchal et Yana Vasilenko, Non conformal adaptation and mesh smoothing for compressible Lagrangian fluid dynamics. À paraître dans les actes du CEMRACS 2007.
- [37] Robert Eymard, Thierry Gallouët et Raphaële Herbin, **Finite Volume Method**. Handbook for Numerical Analysis, vol. VII, Ph. G. Ciarlet J.-L. Lions eds, North Holland (2000).
- [38] Antonio F. Fortes, Daniel D. Joseph et Thomas S. Lundgren, Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spherical particles. *J. Fluid Mech.* 177 (1987), p. 467–483.
- [39] Gérard Gallice, Schémas de type Godunov entropiques et positifs préservant les discontinuités de contact. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 331 (2000), n° 2, p. 149–152.
- [40] Gérard Gallice, Schémas de type Godunov entropiques et positifs pour la dynamique des gaz et la magnétohydrodynamique lagrangiennes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 332 (2001), n° 11, p. 1037–1040.
- [41] Thierry Gallouët, Jean-Marc Hérard et Nicolas Seguin, Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 14 (2004), n° 5, p. 663–700.
- [42] James Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965), p. 697–715.
- [43] James Glimm, John W. Grove, Xiao Lin Li, Keh-Ming Shyue, Yanni Zeng et Qiang Zhang, Three-dimensional front tracking. *SIAM J. Sci. Comput.* 19 (1998), n° 3, p. 703–727.
- [44] Paola Goatin et Philippe G. LeFloch, The Riemann problem for a class of resonant hyperbolic systems of balance laws. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 21 (2004), n° 6, p. 881–902.
- [45] Edwige Godlewski et Pierre-Arnaud Raviart, **Hyperbolic systems of conservation laws**. Mathématiques & Applications. Ellipses, Paris (1991).
- [46] Sergey K. Godunov et Evgenii I. Romenskii, Thermodynamics, conservation laws and symmetric forms of differential equations in mechanics of continuous media. In **Computational fluid dynamics review 1995**, p. 19–31. John Wiley & sons, New York (1995).
- [47] Sergey K. Godunov, Anton V. Zabrodine, Mikhail Ivanov, Aleksandr N. Kraïko et Genadii P. Prokopov, **Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz**. Éditions Mir, Moscou (1979).
- [48] James M. Greenberg et Donald M. Tong, Decay of periodic solutions of  $\partial u/\partial t + \partial f(u)/\partial x = 0$ . *J. Math. Anal. Appl.* 43 (1973), p. 56–71.
- [49] Godfrey H. Hardy, John E. Littlewood et György Pólya, **Inequalities**. Cambridge Univ. Press, London (1934).
- [50] Amiram Harten, On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), n° 1, p. 1–23.
- [51] Brian T. Hayes et Philippe G. LeFloch, Non-classical shocks and kinetic relations: scalar conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.* 139 (1997), n° 1, p. 1–56.
- [52] Brian T. Hayes et Philippe G. LeFloch, Nonclassical shocks and kinetic relations: finite difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.* 35 (1998), n° 6, p. 2169–2194 (electronic).
- [53] Matthieu Hillairet, Asymptotic collisions between solid particles in a Burgers-Hopf fluid. *Asymptot. Anal.* 43 (2005), n° 4, p. 323–338.



- [54] Cyril W. Hirt et Billy D. Nichols, Volume Of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* 39 (1981), p. 201–225.
- [55] Lars Hörmander, **Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations**. Mathématiques & Applications, 26. Springer-Verlag, Berlin (1997).
- [56] Howard H. Hu, Daniel D. Joseph et Marcel J. Crochet, Direct simulation of fluid-particle motions. *Theor. Comput. Fluid Dynam.* 3 (1992) p. 285–306.
- [57] Howard H. Hu, Neelesh A. Patankar et Mingyu Zhu, Direct numerical simulations of fluid-solid systems using the arbitrary Lagrangian-Eulerian technique. *J. Comput. Phys.* 169 (2001), n° 2, p. 427–462.
- [58] Eli Isaacson et Blake Temple, Convergence of the  $2 \times 2$  Godunov method for a general resonant nonlinear balance law. *SIAM J. Appl. Math.* 55 (1995), n° 3, p. 625–640.
- [59] Jean Jacod et Philip Protter, **L’essentiel en théorie des probabilités**. Cassini (2003).
- [60] Shi Jin et Zhou Ping Xin, The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.* 48 (1995), n° 3, p. 235–276.
- [61] Byung-Il Jun, A modified equipotential method for grid relaxation, Lawrence Livermore National Laboratory report (2000).
- [62] Stanislav N. Kružkov, First order quasilinear equations with several independent variables. (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* 81 (123) (1970), p. 228–255.
- [63] Patrick Knupp, Len G. Margolin et Mikhail Shashkov, Reference Jacobian Optimization-Based Rezone Strategies for Arbitrary Lagrangian Eulerian Methods. *J. Comput. Phys.* 176 (2002), 1, p. 93–128.
- [64] Nikolai N. Kuznecov, The accuracy of certain approximate methods for the computation of weak solutions of a first order quasilinear equation. (Russian) *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* 16 (1976), n° 6, p. 1489–1502.
- [65] Peter D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws. II. *Comm. Pure Appl. Math.* 10 (1957) p. 537–566.
- [66] Aline Lefebvre, Fluid-particle simulations with FreeFem++. *ESAIM: Proc.* 18 (2007) p. 120–132.
- [67] Philippe G. LeFloch, **Hyperbolic systems of conservation laws. The theory of classical and nonclassical shock waves**. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel (2002).
- [68] Philippe G. LeFloch et Christian Rohde, High-order schemes, entropy inequalities, and nonclassical shocks. *SIAM J. Numer. Anal.* 37 (2000), n° 6, p. 2023–2060 (electronic).
- [69] Alain-Yves Le Roux, A numerical conception of entropy for quasi-linear equations. *Math. of Comp.* 31 (1977), n° 140, p. 848–872.
- [70] Raphaël Loubère et Mikhail Shashkov, A subcell remapping method on staggered polygonal grids for arbitrary-Lagrangian-Eulerian methods. *J. Comput. Phys.* 209 (2005), 1, p. 105–138.
- [71] Pierre-Henri Maire, Rémi Abgrall, Jérôme Breil et Jean Ovardia, A cell-centered Lagrangian scheme for two-dimensional compressible flow problems. *SIAM J. Sci. Comput.* 29 (2007), n° 4, p. 1781–1824.
- [72] Joseph Málek, Jindřich Nečas, Mirko Rokyta et Michael Růžička, **Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs**. Applied Mathematics and Mathematical Computation, 13. Chapman & Hall, London (1996).
- [73] Benoît Merlet,  $L^\infty$ - and  $L^2$ -error estimates for a finite volume approximation of linear advection. *SIAM J. Numer. Anal.* 46 (2007/08), n° 1, p. 124–150.
- [74] Benoît Merlet et Julien Vovelle, Error estimate for finite volume scheme. *Numer. Math.* 106 (2007), n° 1, p. 129–155.
- [75] Stewart J. Mosso et Sean Clancy, A geometrical derived priority system for Young’s interface reconstruction. LA-CP-95-0081, LANL report (1995).

- [76] William F. Noh et Paul R. Woodward, SLIC (Simple Line Interface Calculation), Springer Lecture Notes in Physics, 25 (1976), p. 330–339.
- [77] Benoît Perthame, Second-order Boltzmann schemes for compressible Euler equations in one and two space dimensions. *SIAM J. Numer. Anal.* 29 (1992), n° 1, p. 1–19.
- [78] Benoît Perthame et Eitan Tadmor, A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. *Comm. Math. Phys.* 136 (1991), n° 3, p. 501–517.
- [79] Valentin V. Petrov, **Sums of independent random variables**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1975).
- [80] Victor H. Ransom et Darrell L. Hicks, Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow. *J. Comput. Phys.* 53 (1984), n° 1, p. 124–151.
- [81] Richard Saurel et Rémi Abgrall, A simple method for compressible multifluid flows. *SIAM J. Sci. Comput.* 21 (1999), n° 3, p. 1115–1145 (electronic).
- [82] Richard Saurel et Rémi Abgrall, A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *J. Comput. Phys.* 150 (1999), n° 2, p. 425–467.
- [83] Denis Serre, **Systèmes de lois de conservation. I. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc**. Fondations. Diderot Editeur, Paris (1996).
- [84] Denis Serre, **Systèmes de lois de conservation. II. Structures géométriques, oscillation et problèmes mixtes**. Fondations. Diderot Editeur, Paris (1996).
- [85] Denis Serre, **Matrices. Theory and applications**. Graduate Texts in Mathematics 216, Springer-Verlag, New York (2002).
- [86] Joel Smoller, **Shock waves and reaction-diffusion equations**. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], 258, Springer-Verlag, New York-Berlin (1983).
- [87] H. Bruce Stewart et Burton Wendroff, Two-phase flow: models and methods. *J. Comput. Phys.* 56 (1984), n° 3, p. 363–409.
- [88] Peter K. Sweby, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), n° 5, p. 995–1011.
- [89] Tao Tang et Zhen-Huan Teng, The sharpness of Kuznetsov’s  $O(\sqrt{\Delta x})$   $L^1$ -error estimate for monotone difference schemes. *Math. of Comp.* 64 (1995), n° 210, p. 581–589.
- [90] Robert Tipton, Grid optimization by equipotential relaxation, Lawrence Livermore National Laboratory report (1992).
- [91] Eleuterio F. Toro, **Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction**. Springer-Verlag, Berlin (1997).
- [92] Clifford A. Truesdell, **Rational thermodynamics**. Springer-Verlag, New York, (1984).
- [93] Juan Luis Vázquez et Enrique Zuazua, Large time behavior for a simplified 1D model of fluid-solid interaction. *Comm. Partial Differential Equations* 28 (2003), n° 9-10, p. 1705–1738.
- [94] Juan Luis Vázquez et Enrique Zuazua, Lack of collision in a simplified 1D model for fluid-solid interaction. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 16 (2006), n° 5, p. 637–678.
- [95] Jean-Paul Vila, Convergence and error estimates in finite volume schemes for general multidimensional scalar conservation laws. I. Explicit monotone schemes. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 28 (1994), n° 3, p. 267–295.
- [96] Jean-Paul Vila et Philippe Villedieu, Convergence of an explicit finite volume scheme for first order symmetric systems. *Numer. Math.* 94 (2003), n° 3, p. 573–602.
- [97] Paul Woodward et Phillip Colella, The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comput. Phys.* 54 (1984), n° 1, p. 115–173.
- [98] Zhengfu Xu et Chi-Wang Shu, Anti-diffusive flux corrections for high order finite difference WENO schemes. *J. Comput. Phys.* 205 (2005), n° 2, p. 458–485.
- [99] Zhengfu Xu et Chi-Wang Shu, Anti-diffusive high order WENO schemes for Hamilton-Jacobi equations. *Methods Appl. Anal.* 12 (2005), n° 2, p. 169–190.

- [100] David L. Youngs, An interface tracking method for a 3D Eulerian hydrodynamics code. Technical Report 44/92/35, AWRE (1984).