

Equation de Burgers généralisée à force aléatoire et à viscosité petite

Generalised Burgers equation with random force and small viscosity

Alexandre Boritchev, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz,
Ecole Polytechnique

Sous la direction de Sergei Kuksin

Résumé

Introduction

Motivation : théorie de Kolmogorov, intermittence, mesure stationnaire

"Burgulence" 1D : prédictions physiques

"Burgulence" 1D : résultats analytiques

Mesure stationnaire et minimiseurs

Conclusion

Equation de Burgers périodique stochastique 1D

$$u_t + f'(u)u_x = \nu u_{xx} + \eta, \quad t \geq 0, \quad x \in S^1. \quad (1DB)$$

f lisse, strictement convexe, de croissance modérée.

$\nu > 0$, $\nu \ll 1$.

$\eta(t, x)$: force lisse en espace, de type "bruit blanc" en temps.

$\eta = w_t$, où w processus de Wiener lisse en espace.

Condition initiale $u(0, x) \in L_1$.

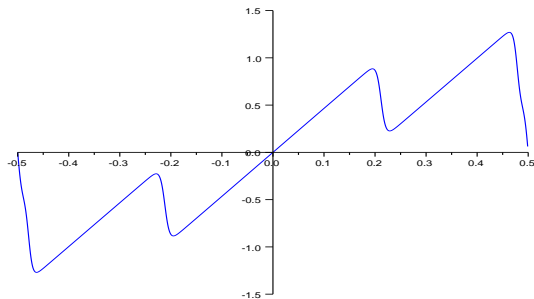
$\int_{S^1} \eta(t, \cdot) = 0$; $\int_{S^1} u(0, \cdot) = 0$. Donc $\int_{S^1} u(t, \cdot) = 0$, $\forall t$.

Nous nous limiterons au cas $f(u) = u^2/2$. Même type de non-linéarité et de dissipation que (NSE); pas de pression. Modèle naturel pour (NSE). Étudié par de nombreux physiciens : Burgers, Kida, Kraichnan, Zeldovich, Frisch, Parisi, Gotoh, Polyakov...

Chocs après un temps fini pour $\nu = 0$. Lorsque $\nu > 0$, la solution devient lisse instantanément. Chocs \Rightarrow "falaises" (cliffs).

Seule la valeur de ν change : nous fixons η et u_0 .

Profil typique d'une solution de (1DB)



Amplitude de la solution ~ 1 . "Falaises" (cliffs) : nombre de falaises ~ 1 , dénivelé ~ -1 , largeur $\sim \nu$.

Cf. l'article de synthèse [Bec-Khanin 2007]. On parle de "Burgulence" ou turbulence de Burgers. Structure "rampes-falaises" ("ramp-cliff").

Les équations de Navier-Stokes incompressibles en 3D

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \eta; \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (\text{NSE})$$

On doit préciser des conditions limites.

$\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ vitesse	$\nu > 0$ coefficient de viscosité constant
$p(t, \mathbf{x})$ pression	$(\nu \ll 1)$
	$\eta(t, \mathbf{x})$ force aléatoire, lisse
	en la variable \mathbf{x}

Il s'agit d'étudier le comportement statistique de \mathbf{u} lorsque ν varie, tous les autres paramètres étant fixés.

Echelles

Dans l'espace de Fourier, une **échelle** est, grossièrement, l'inverse de la fréquence considérée. **Dans cet exposé, nous ne considérons que des échelles spatiales, et non des échelles temporelles.**

Par exemple, dans le cas périodique, **les quantités à petite échelle** sont des quantités du même type que les coefficients de Fourier $\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{k}}$ pour \mathbf{k} grand.

Dans l'étude de la turbulence, on dit aussi que des quantités dans l'espace physique du type $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$ pour \mathbf{r} petit sont à petite échelle.

La théorie K41

Le comportement à petite échelle d'un champ de vitesses pour un fluide turbulent est un très vieux problème (années 1930- : Taylor, Onsager, Heisenberg, von Weizsäcker, Batchelor...)

3 articles de Kolmogorov (1941). Diverses hypothèses physiques (cf [Frisch 1995], [Tsinober 2001]), dont le fait d'avoir un régime stationnaire en temps.

Nous nous bornerons au cas d'un fluide périodique en espace.

Notations

$X \stackrel{a}{\sim} Y$: Il existe $C > 0$ telle que $C^{-1}X \leq Y \leq CX$.
 C ne dépend que du paramètre a . a n'est **jamais** la viscosité ν . Les notations $\stackrel{a}{\gtrsim}$ et $\stackrel{a}{\lesssim}$ sont définies de façon analogue.

$\langle \dots \rangle$: Espérance (lorsqu'on considère une force aléatoire).

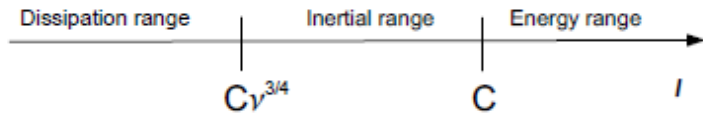
La théorie K41 : les zones.

L'**échelle dissipative** ℓ_d est l'échelle telle que, pour $\|\mathbf{k}\| \gtrsim \ell_d^{-1}$, les coefficients de Fourier d'une fonction \mathbf{u} décroissent très vite, uniformément en ν . On dit que $\mathbb{I}_{diss} = [0, \ell_d]$ est la **zone dissipative**. Pour K41, $\ell_d = C\nu^{3/4}$.

La **zone énergétique** $\mathbb{I}_{energ} = [\ell_e, 1]$ est l'ensemble d'échelles telles que les modes de Fourier correspondants contiennent la plus grande partie de la norme L^2 de \mathbf{u} :

$$\sum_{\|\mathbf{k}\| \leq \ell_e^{-1}} \langle |\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{k}}|^2 \rangle \gg \sum_{\|\mathbf{k}\| > \ell_e^{-1}} \langle |\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{k}}|^2 \rangle. \text{ Pour K41, } \ell_e = C.$$

$\mathbb{I}_{inert} = [\ell_d, \ell_e]$ est la **zone inertielle**. Pour K41, $\mathbb{I}_{inert} = [C\nu^{3/4}, C]$.



La théorie K41 : résultats dans l'espace physique

On commence par considérer les moments de l'**incrément longitudinal** :

$$S^{\parallel}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}.$$

Le p -ème moment de $S^{\parallel}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ est appelé **fonction de structure d'ordre p** :

$$S_p^{\parallel}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \left\langle \left| \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right|^p \right\rangle.$$

Pour \mathbf{r} , $\|\mathbf{r}\| = \ell \in \mathbb{I}_{inert}$, $p \geq 0$, on a

$$S_p^{\parallel}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \stackrel{p}{\sim} \ell^{p/3}.$$

La théorie K41 : résultats dans l'espace de Fourier

Soit $E(k)$ la moyenne de $\langle \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}}|^2 \rangle$ sur l'ensemble des \mathbf{n} tels que $\|\mathbf{n}\| \in [C^{-1}k, Ck]$.

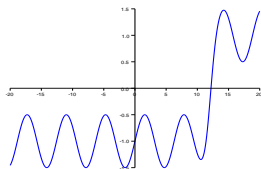
Pour k tel que $k^{-1} \in \mathbb{I}_{inert}$, le **spectre d'énergie** $E(k)$ vérifie :

$$E(k) \sim k^{-5/3}.$$

(Obukhov 1941)

Intermittence et corrections à K41

Les prédictions de K41 sont en accord avec les expériences/simulations pour S_p^{\parallel} , $p \leq 3$ et pour le spectre d'énergie. Cependant, ceci n'est pas le cas pour S_p^{\parallel} , $p \geq 4$. Des théories apportant des corrections à K41 ([Kolmogorov 1962], [Frisch, Parisi 1985]) expliquent cela par l'**intermittence** spatiale.



Ce type d'intermittence peut être quantifié par le **facteur d'aplatissement** $F(\ell) = S_4^{\parallel}(\ell)/S_2^{\parallel}(\ell)^2$: la fonction est d'autant plus intermittente que F est grand. On voit par ailleurs que la structure en "rampes-falaises" donne un bon exemple d'intermittence.

Etude d'équations stochastiques perturbées par un petit paramètre

Etude commencée par Kuksin [Kuksin 1997, 1999...], continuée notamment avec ses collaborateurs dont Shirikyan (Navier-Stokes 2D), Piatnitskii... sur NLS, KDV...

Idée :

dérivée en temps = nonlinéarité + ν · dissipation (ou dispersion, ou...) + ν^α · terme stochastique

Egalement étude dans le cas non stochastique : Biryuk, Huang...

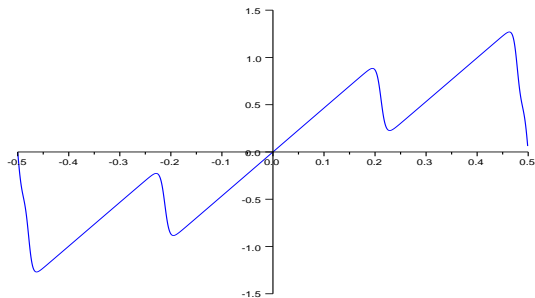
Un des problèmes les plus importants est d'étudier le comportement à petite échelle. Un autre est d'étudier l'existence et surtout **l'unicité** d'une mesure stationnaire et d'évaluer la vitesse de convergence vers celle-ci.

Pour Burgers le problème étudié notamment par [E, Khanin, Mazel, Sinai 2000] dans le cas non visqueux. Les méthodes utilisées sont différentes (on regarde notamment les minimiseurs d'énergie).

Equation de Burgers périodique stochastique 1D

$$u_t + f'(u)u_x = \nu u_{xx} + \eta, \quad t \geq 0, \quad x \in S^1. \quad (1DB)$$

Encore une fois, **seule la valeur de ν change** : nous fixons η et u_0 .



Prédictions pour (1DB)

Prédictions physiques pour les échelles spatiales, les incréments, le facteur d'aplatissement, le spectre d'énergie.

Cas sans force, avec données initiales aléatoires ([Kraichnan 1968], [Kida 1979], [Aurell-Frisch-Lutsko-Vergassola 1992]).

Les arguments s'adaptent bien au cas d'une force lisse en espace.

Cas avec force : [E-Khanin-Mazel-Sinai 1997] (mesure stationnaire pour $\nu = 0$), [Kraichnan-Gotoh 1998].

Pas de démonstrations quantitatives dans le cadre qui nous intéresse ($\nu > 0$, évolution en temps fini, force de type bruit blanc en temps lisse en espace).

Prédictions pour (1DB) : échelles spatiales

Echelle dissipative (l'échelle ℓ_d telle que le spectre d'énergie décroît très vite pour les modes de Fourier correspondant à $|k| \succeq \ell_d^{-1}$) :

$C\nu$.

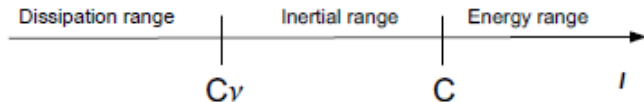
K41 : $C\nu^{3/4}$.

Zone énergétique (correspondant aux modes de Fourier contenant la plus grande partie de la norme L^2) : $\mathbb{I}_{energ} = [C, 1]$.

K41 : $[C, 1]$.

Zone inertielle : $\mathbb{I}_{inert} = [C\nu, C]$.

K41 : $[C\nu^{3/4}, C]$.



Prédictions pour (1DB) dans l'espace physique

Les **fonctions de structure**, c-à-d les moments des incréments :

Pour $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$, soit

$$S_p(\ell) = \left\langle \int_{S^1} |u(x + \ell) - u(x)|^p dx \right\rangle.$$

On a alors

$$S_p(\ell) \stackrel{p}{\sim} \begin{cases} \ell^p, & 0 \leq p \leq 1. \\ \ell, & p \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{K41 : } S_p(\ell) \stackrel{p}{\sim} \ell^{p/3}, \quad \forall p.$$

Coefficient d'aplatissement : Pour $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$, soit

$F(\ell) = S_4(\ell)/S_2(\ell)^2$. On a

$$F(\ell) \sim \ell^{-1}.$$

$$\text{K41 : } F(\ell) \sim 1.$$

Prédictions pour (1DB) dans l'espace de Fourier

Spectre d'énergie : Soit $E(k)$ la moyenne de $\langle \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{u}}^n|^2 \rangle$ sur l'ensemble des n tels que $|n| \in [C^{-1}k, Ck]$. Alors, pour $k^{-1} \in \mathbb{I}_{inert}$:

$$E(k) \sim k^{-2}.$$

$$\text{K41} : E(k) \sim k^{-5/3}.$$

Estimations pour les normes de la solution : préliminaires

Dans [Bor2], nous obtenons des bornes supérieures et inférieures optimales pour les normes de Sobolev $W^{m,p}$ de la solution de (1DB). Ces bornes sont uniformes par rapport à la condition initiale $u(0, \cdot)$. Elles coïncident à un facteur multiplicatif (indépendant de ν) près.

Notations :

$|\cdot|_{m,p}$: norme de Sobolev dans $W^{m,p}(S^1)$.

$\langle \dots \rangle$: espérance (pour un temps donné).

$\{ \dots \}$: espérance de la moyenne en temps sur $[t, t + T_0]$, où $t \geq T_0$, et T_0 est une constante.

Estimations pour les normes de la solution

Theorème 1

$$\{|u|_p^n\} \stackrel{n}{\sim} 1, \forall n \geq 0, p \in [1, +\infty].$$

Theorème 2

$$\{(\max_{S^1} u_x^+)^n\} \stackrel{n}{\sim} 1, \{(\max_{S^1} u_x^-)^n\} \stackrel{n}{\sim} \nu^{-n}, \forall n \geq 0.$$

Theorème 3

$$\{|u|_{m,\infty}^n\} \stackrel{m,n}{\sim} \nu^{-mn}, \forall m \geq 1, n \geq 0.$$

Les bornes supérieures sont obtenues en utilisant des méthodes stochastiques et le principe du maximum de Kruzhkov. Il s'agit d'un principe du maximum très fort : s'il n'y a pas de force, on obtient que $tu_x \leq 1!$ (indépendamment de la condition initiale) ! Qui plus est il est robuste par rapport au type de force considéré.

Les bornes inférieures sont obtenues en utilisant des méthodes stochastiques (relation de dissipation d'énergie exprimée à l'aide de la formule d'Itô).

Que nous disent ces estimations ?

$$\{|u|_p^n\} \sim 1, \forall n \geq 0, p \in [1, +\infty].$$

\Rightarrow amplitude de $u \sim 1$.

$$\{(\max_{S^1} u_x^+)^n\} \sim 1, \{(\max_{S^1} u_x^-)^n\} \sim \nu^{-n}, \forall n \geq 0.$$

\Rightarrow partie positive de $u_x \sim 1$; partie négative de $u_x \sim \nu^{-1}$.

$$\{|u|_{m,\infty}^n\} \sim \nu^{-mn}, \forall m \geq 1, n \geq 0.$$

$\Rightarrow u(x)$ se comporte "comme $g(x\nu^{-1})$ ".

Problème : partie positive de u_x . Il faut donc travailler plus (incréments...)

Notations

$S_p(\ell) : \left\{ \int_{S^1} |u(x + \ell) - u(x)|^p dx \right\}, p \geq 0.$

$E(k) : \text{moyenne de } \left\{ \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{u}}^n|^2 \right\} \text{ sur les } n \text{ tels que } |n| \in [C^{-1}k, Ck], \text{ où } C > 0 \text{ est une constante.}$

Résultats principaux : échelles spatiales

D'après les Théorèmes 1-3, on obtient les résultats suivants, qui confirment les prédictions physiques. Toutes les définitions sont changées, de manière à intégrer la moyenne en temps, et non seulement l'espérance.

Theorème 4

Pour une solution de (1DB), l'échelle dissipative ℓ_d vaut $C\nu$ et $\mathbb{I}_{energ} = [C, 1]$.

Donc $\mathbb{I}_{inert} = [C\nu, C]$.

Résultats principaux dans l'espace physique

Theorème 5

Pour $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$, les fonctions de structure vérifient :

$$S_p(\ell) \underset{p}{\sim} \begin{cases} \ell^p, & 0 \leq p \leq 1. \\ \ell, & p \geq 1. \end{cases}$$

Corollaire 1

Pour $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$, le coefficient d'aplatissement vérifie :

$$F(\ell) \sim \ell^{-1}.$$

Résultats principaux dans l'espace physique : démonstration

Les bornes supérieures découlent immédiatement des Théorèmes 1-3 en utilisant l'inégalité de Hölder.

Les bornes inférieures du Théorème 5 sont dues au fait que, avec une probabilité $\geq C_1$ les solutions sont "typiques" pendant un temps $\geq C_2$ sur $[t, t + T_0]$. Les constantes $C_1, C_2 > 0$ sont indépendantes de ν .

En d'autres mots, leurs normes de Sobolev vérifient les estimées des Théorèmes 1-3 (sans espérance ni moyenne en temps). Cela suffit pour écrire une version quantitative des arguments d'Aurell-Frisch-Lutsko-Vergassola pour $p \geq 1$.

Résultats principaux dans l'espace de Fourier

Theorème 6

Pour $k^{-1} \in \mathbb{I}_{inert}$, le spectre d'énergie vérifie :

$$E(k) \sim k^{-2}.$$

Idee de la preuve : On regarde les coefficients de Fourier de $u(x + \ell) - u(x)$. **Formule de Wiener-Khinchin** :

$$\int_{S^1} |u(x + \ell) - u(x)|^2 dx = 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin^2(\pi n \ell) |\hat{u}^n|^2.$$

Pour (1DB), on a une loi d'échelle de type K41.

Généralisations

On a les mêmes résultats pour une "kicked force" car on a les mêmes estimations pour les normes de Sobolev (cf. [Bor1]).

On a aussi des résultats très similaires (sous les conditions $|u(0, \cdot)|_1, |u(0, \cdot)|_{1,\infty} \sim 1$) pour le cas de Burgers sans force (cf. [Biryuk 2001, Bor3]).

Mesure stationnaire

Les solutions u définissent un processus de Markov dans $L_1(S^1)$. Le semigroupe de Markov correspondant S_t est contractant :

$$|S_t u_0 - S_t \tilde{u}_0|_1 \leq |u_0 - \tilde{u}_0|_1.$$

Les Théorèmes 1-3 impliquent, par l'argument de Bogolyubov-Krylov, l'existence d'une mesure stationnaire. Son unicité s'obtient en utilisant une forme simplifiée des arguments de Kuksin-Shirikiyani pour Navier-Stokes 2D.

Résultats pour $\nu=0$: les minimiseurs

La solution de Burgers est la dérivée de la solution d'Hamilton-Jacobi :

$$\phi_t + \frac{1}{2}|\phi_x|^2 = d\tilde{w}_t.$$

On considère le Lagrangien correspond à l'Hamiltonien $H(u) = u^2/2$:

$$L(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + dw(t, x(t))$$

Etant donnée une condition initiale $g(x)$ au temps t_1 , on a :

$$\phi(t_2, x) = \min_{\gamma} \left(g(\gamma(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right),$$

sur les courbes γ satisfaisant la contrainte $\gamma(t_2) = x$.

Résultats pour $\nu = 0$: hyperbolicité des minimiseurs

Dans [Bor-Khanin], on considère pour une condition initiale $g(s)$ l'ensemble des points atteints par des minimiseurs en un temps donné :

$$\Omega(s, t) = \{x \in S^1 : \exists y \in S^1, \gamma_{s,t,g,y}(s) = x\},$$

et on prouve que sous des conditions de non-dégénérescence sur le bruit dw (par exemple, 2 modes ($\sin 2\pi x$, $\cos 2\pi x$) suffisent), cet ensemble retrécit exponentiellement lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ce résultat implique l'**hyperbolicité** des minimiseurs.

On considère aussi bien le cas de la force bruit blanc que de la "kick force". On considère seulement le cas d'un bruit de dimension finie.

Il s'agit d'une simplification significative de la preuve dans [E-Khanin-Mazel-Sinai 2000], sous des conditions de non-dégénérescences plus explicites.

Conclusion

Nous avons obtenu des résultats précis et rigoureux pour la turbulence de Burgers à petite échelle, qui confirment les prédictions physiques sous des hypothèses très générales pour la donnée initiale et raisonnables pour la force. Les estimations des quantités à petite échelle ont également lieu pour les solutions de l'équation inviscide, ainsi que pour la solution stationnaire à $\nu > 0$.

Nous avons également obtenu des résultats sur le comportement dynamique des solutions, notamment à travers l'étude des objets importants que sont les minimiseurs.

Perspectives

On espère pouvoir extraire des informations plus précises sur la vitesse (exponentielle uniformément en ν ?) de convergence vers la solution invariante.

J'espère que des résultats très similaires peuvent être prouvés dans le cas multidimensionnel lorsque u est un gradient :

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} + \eta_t; \quad \mathbf{u} = \nabla \phi.$$

ainsi que pour d'autres équations admettant un bon principe de maximum.

Bibliographie

E. Aurell, U. Frisch, J. Lutsko, M. Vergassola, *On the Multifractal Properties of the Energy Dissipation Derived from Turbulence Data*, Journal of Fluid Mechanics 238, 1992, 467-486.

[Bor1] : A. Boritchev, *Estimates for Solutions of a Low-Viscosity Kick-Forced Generalised Burgers Equation*, Prépublication (à paraître dans Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A), arXiv :1107.4866v1.

[Bor2] : A. Boritchev, *Sharp Estimates for Turbulence in White-Forced Generalised Burgers Equation*, Soumis, arxiv :1201.5567.

[Bor-Khanin] : A. Boritchev, K. Khanin, *On hyperbolicity of minimizers for 1D random Lagrangian systems*, Soumis, arXiv :1203.4990.

[Bor4] : A. Boritchev, *Note on Decaying Turbulence in a Generalised Burgers Equation*, Prépublication, arXiv :1208.5241.