Chapitre 10 - Équivalents

La notion de fonctions équivalentes est un outil simple d'une grande efficacité pour calculer des limites.

De plus la notion a un intérêt en tant que telle : savoir qu'une fonction f est équivalente à n donne n^3 quand n tend vers l'infini, cela donne en pratique une idée de l'ordre de grandeur de $f(1000000)$ (en pratique et non en théorie, d'ailleurs, car d'un point de vue théorique, 1000000 n'a rien de particulier et le comportement de f en ce point pourrait n'avoir rien de commun avec son comportement à l'infini !)

1 - La définition

Expliciter une définition correcte se révèle très désagréable : des problèmes se posent dès que les deux fonctions envisagées peuvent s'annuler, empêchant de faire la division qu'on souhaiterait.

De ce fait, la définition précise (et assez arbitraire) que je donne ne mérite pas d'être considérée longuement : elle sera exceptionnellement doublée d'une "définition approximative" qui me semble être celle qui doit être retenue.

Définition 10-1-90 : Soit a un nombre réel ; soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbf{R}$ à laquelle a est adhérent, et soit f, g deux fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathcal{D}$. On dit que f est **équivalente** à g quand $t \to a$ lorsqu'il existe un réel $\epsilon > 0$ et une fonction h de $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap \mathcal{D}$ vers $\mathbf{R}$ telle que pour t dans cet intervalle, $f(t) = h(t)g(t)$ et que $h(t)$ tende vers 1 quand $t \to a$.

Notation 10-1-42 : Lorque f est équivalente à g quand $t \to a$, on note "$f \sim g$ quand $t \to a$" (ou en abrégé $f \sim_a g$).

Remarques : * Il était difficile d'admettre que f et g aient des ensembles de définition distincts sans inconvénients ; de ce fait, quand on écrira : $\tan x \sim x$ quand $x \to 0$, il faudra bien sûr comprendre que la deuxième fonction mentionnée est la restriction de $x \mapsto x$ à l'ensemble de définition de la fonction tangente.

* Une autre définition est nécessaire pour le cas des équivalents à l'infini. Je ne lui fais pas l'honneur de la numéroter et me contente d'indiquer ce qui doit être modifié dans la définition précédente : en $+\infty$ on remplacera l'hypothèse "a adhérent à $\mathcal{D}$" par "$\mathcal{D}$ non majoré" et le passage qui parle d'ϵ par "il existe un réel A et une fonction h de $[A, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$". Tous les résultats énoncés ci-dessous pour un a réel se transposent sans modifications à l'infini.

Comme promis, voici une version approximative, et utilisable en pratique, de la définition.

Version à retenir de la définition (fausse, mais qu'importe) : soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbf{R}$ à laquelle a est adhérent, et soit f, g deux fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathcal{D}$. On dit que f est **équivalente** à g quand $t \to a$ lorque $\dfrac{f}{g}(t) \to 1$ quand $t \to a$.

2 - Produire des limites à partir des équivalents

Proposition 10-2-54 : Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbf{R}$ et a un réel adhérent à $\mathcal{D}$; soit f une fonction de $\mathcal{D}$ vers $\mathbf{R}$. Alors pour toute constante c non nulle :

$$f(t) \sim c \qquad \text{quand } t \to a \iff f(t) \to c \qquad \text{quand } t \to a.$$

De plus, une fonction équivalente à une fonction qui tend vers 0 tend elle aussi vers 0 et une fonction équivalente à une fonction qui tend vers $+\infty$ tend aussi vers $+\infty$.

Démonstration : Tapant ce chapitre à la dernière minute, j'ai une tendance excessive à les considérer comme très faciles et les sauter.

•

3 - Propriétés élémentaires des équivalents

Proposition 10-3-55 : Comme son nom l'indique, pour $\mathcal{D}$ et a fixés, $\sim_a$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ vers $\mathbf{R}$.

Démonstration : Ennuyeuse comme la pluie, évidente avec la définition truquée et à peine plus longue avec la définition correcte...

•

Proposition 10-3-56 : Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbf{R}$ et a un réel adhérent à $\mathcal{D}$. Soit f, g, f_1 et g_1 des fonctions de $\mathcal{D}$ vers $\mathbf{R}$.
On suppose que $f \sim_a g$ et $f_1 \sim_a g_1$. Alors : a) $ff_1 \sim_a gg_1$; b) $\dfrac{1}{f} \sim_a \dfrac{1}{g}$;
c) Soit α un réel fixé, on suppose f à valeurs strictement positives sur $\mathcal{D}$. Alors, quitte à restreindre les ensembles de définitions, g est aussi à valeurs strictement positives et $f^\alpha \sim_a g^\alpha$;
d) Soit s_0 un réel, $\mathcal{D}_u$ une partie de $\mathbf{R}$ à laquelle s_0 est adhérent et u une fonction définie sur $\mathcal{D}_u$ et à valeurs dans $\mathcal{D}$ telle que $u(s) \to a$ quand $s \to s_0$. Alors $f[u(s)] \sim g[u(s)]$ quand $s \to s_0$.
Démonstration : Toujours facile et ennuyeux...
•

Remarques : * du a) et du b) découle évidemment la possibilité de diviser les équivalents.
* le c) est un peu désagréablement exprimé, avec son "quitte à restreindre"... mais j'assume et n'éclaire pas davantage ce que ça veut dire.

Plutôt que d'écrire des démonstrations ennuyeuses, je préfère insister sur les points qui **ne marchent pas** :
* Les équivalents ne **s'additionnent pas** (et bien sûr ne se soustrayent pas).
* En utilisant le c), ne perdez pas de vue qu'il concerne un α réel (et donc constant) et qu'il ne **marche pas** pour une fonction $\alpha(t)$ à valeurs réelles : il se peut que $f(t) \sim_a g(t)$ mais que $[f(t)]^{\alpha(t)} \not\sim [g(t)]^{\alpha(t)}$.
* La composition **ne marche que dans un sens** (celui où les fonctions équivalentes sont "à gauche" dans la formule composée). Tout de suite un contre-exemple pour bien faire rentrer dans vos petites têtes le problème :
quand $x \to +\infty$, il est clair que $x^2 + x \sim x^2$, puisque $\dfrac{x^2+x}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x} \to 1$ quand $x \to +\infty$. Pourtant :
$\dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^x$ ne tend pas vers 1 quand x to ∞ et donc $e^{x^2+x} \not\sim e^{x^2}$ en $+\infty$.
Les compositions avec l'exponentielle sont le piège le plus courant avec ce type de compositions, mais ce n'est pas le seul !
* Les équivalents **ne se laissent pas dériver** : si $f \sim_a g$ pour deux fonctions dérivables, rien n'assure que $f' \sim_a g'$.

4 - Un exemple d'utilisation de tout ce qui précède

Listons quelques équivalents classiques, qui découleront du chapitre suivant :
quand $x \to 0$, $\sin x \sim x$, $\operatorname{ch} x - 1 \sim x^2/2$, $\ln(1+x) \sim x$
et posons un
Exercice : prouver l'existence de la limite suivante, et la calculer : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x^2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}{\sin(\tan^2 x)\ln(1+x)}$.
Solution : La question qui m'est posée possède une superbe barre de fractions qui la scinde en un haut et un bas. Les équivalents passant bien aux divisions, ceci invite à traiter séparément le haut et le bas.

Regardons le haut, soit $x^2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$. C'est un produit : les équivalents se prêtent donc bien à son calcul. Quand $x \to 0$, on sait que $\operatorname{ch} x - 1 \sim x^2/2$. Donc $(\operatorname{ch} x - 1)^{1/2} \sim (x^2/2)^{1/2}$, c'est-à-dire (pour des $x < 0$) : $\sqrt{\operatorname{ch} x - 1} \sim -x/\sqrt{2}$. En multipliant les équivalents, on a donc montré que le numérateur $x^2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$ est équivalent à $-x^3/\sqrt{2}$.

Regardons maintenant le bas, soit $\sin(\tan^2 x)\ln(1+x)$. On sait que quand $x \to 0$, $\ln(1+x) \sim x$; le premier morceau $\sin(\tan^2 x)$ reste à examiner. En utilisant la règle de composition dans le sens qui marche, et sans oublier de souligner préalablement qu'on peut légitimement l'utiliser parce que $\tan^2 x \to 0$ quand $x \to 0$, on voit d'abord que $\sin(\tan^2 x) \sim \tan^2 x$ quand $x \to 0$ (on peut l'exprimer si on trouve cela plus clair en posant $T = \tan^2 x$: puisque $T \to 0$, on a bien $\sin T \sim T$ quand $x \to 0$). Pour trouver un équivalent de tan, on remarque que comme $\cos x \to 1$ quand $x \to 0$, $\cos x \sim 1$ et donc $\tan x \sim x/1 = x$. En multipliant les équivalents, on a donc montré que le dénominateur , à savoir $\sin(\tan^2 x)\ln(1+x)$ est équivalent à x^3.

En divisant les équivalents, l'expression à étudier est donc équivalente à $-\dfrac{x^3}{\sqrt{2}}/x^3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ quand x tend vers 0^-. Elle tend donc vers la constante $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ quand x tend vers 0^-.

Chapitre 11 - Développements limités

Il s'agit de pallier à deux défauts des équivalents : le mauvais comportement vis-à-vis des additions et de la composition. Le but reste de déterminer des limites, ou peut-être des équivalents.

Les techniques de ce chapitre ont toutefois d'autres utilités indirectes : notamment elles nous permettront de calculer relativement facilement la dérivée 7-ème d'une fonction en un seul point sans avoir à dériver formellement sept fois une affreuse expression.

1 - Fonctions négligeables

Cette section ressemble étrangement à la définition des équivalents (aveu, j'ai copié-collé massivement) : les difficultés techniques sont encore sérieuses, une "définition simplifiée" nous suffira.

Définition 11-1-91 : Soit a un nombre réel ; soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbf{R}$ à laquelle a est adhérent, et soit f, g deux fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathcal{D}$. On dit que f est **négligeable** devant g quand $t \to a$ lorsqu'il existe un réel $\epsilon > 0$ et une fonction h de $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap \mathcal{D}$ vers $\mathbf{R}$ telle que pour t dans cet intervalle, $f(t) = h(t)g(t)$ et que $h(t)$ tende vers 0 quand $t \to a$.

Notation 11-1-43 : Lorque f est négligeable devant g quand $t \to a$, on note "$f \ll g$ quand $t \to a$" (ou en abrégé $f \ll_a g$). Cette notation sera abandonnée dans quelques lignes pour être remplacée par la très ésotérique (mais si pratique !) notation de Landau.

Remarques : * Quand les deux fonctions n'ont pas le même ensemble de définition, on restreint implicitement celle qui a le plus gros ensemble de départ.

* Une autre définition est nécessaire pour le cas de l'infini, exactement comme avec les équivalents.

Comme promis, voici une version approximative, et utilisable en pratique, de la définition.

Version à retenir de la définition (fausse, mais qu'importe) : soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbf{R}$ à laquelle a est adhérent, et soit f, g deux fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathcal{D}$. On dit que f est **négligeable** devant g quand $t \to a$ lorque $\dfrac{f}{g}(t) \to 0$ quand $t \to a$.

2 - La notation de Landau

Notation 11-2-44 : Lorsque f est négligeable devant g quand $t \to a$, on note :

$$f = o(g).$$

Il faut prendre garde que cette curieuse notation est un "faux" signe $=$: il lui manque un certain nombre de propriétés de l'égalité pour être utilisable comme elle.

Tout d'abord elle n'est pas réversible : ainsi quand $x \to 0$, $x^3 = o(x^2)$ et $x^5 = o(x^2)$ mais il serait bien hardi d'en déduire que $x^3 = x^5$.

Les choses vont se compliquer, car bien qu'à la lettre on n'ait défini que la seule expression "$f = o(g)$" (un o est immédiatement précédé d'un signe "$=$") on ne va pas se priver de faire des calculs qui vont déborder de cette définition. Ainsi on osera écrire une expression comme : $o(x) - o(x)$. Mais ceci ne fait pas 0.

L'étudiant est invité à ne pas s'inquiéter : la pratique de ces étrangetés se prend vite. S'il est curieux de comprendre plus, on ne lui reprochera pas : il pourra alors lire les paragraphes suivants ; s'il n'est pas curieux, on ne lui reprochera pas non plus et il fera glisser au plus vite son regard jusqu'à la section suivante.

On peut interpréter ces notations de façon correcte en définissant $o(g)$ comme l'ensemble des fonctions négligeables devant g. Quand on écrit $f = o(g)$, c'est un abus de langage pour $f \in o(g)$. Dès lors que $=$ n'est qu'un $\in$ déguisé, on n'est plus surpris qu'il ne soit pas réversible. On ajoutera que, par abus de langage classique, la notation $f(x)$ devra souvent être comprise comme représentant en réalité la fonction f et non le réel $f(x)$.

Si on est plus exigeant, on voudra alors comprendre le sens exact des $x^4 + o(x^4)$ voire $o(x) - o(x)$ qu'on va voir si souvent écrits. Pour cela, il faut avoir défini ce que veut dire le signe $+$ entre deux ensembles de fonctions, et cette définition est simple : si A est un ensemble de fonctions et B un autre, $A + B$ est l'ensemble des $f+g$ où $f \in A$ et $g \in B$ — de même avec toutes les autres opérations courantes. Cela étant posé, on comprend enfin pourquoi, pour x tendant vers 0, $o(x) - o(x)$ ne fait pas 0 : $o(x)$ contient de nombreuses fonctions, par exemple x^3 et x^5, donc $o(x) - o(x)$ en contient d'encore plus nombreuses, par exemple $x^3 - x^3 = 0$ mais aussi $x^3 - x^5$ ou $x^5 - x^3$.

Une fois ces manipulations ensemblistes comprises, on notera sans peine que certaines égalités sont à lire comme des inclusions : quand on écrit par exemple

$$\sin x = x + o(x^2) = x + o(x) \qquad \text{quand } x \to 0,$$

le premier $=$ est un $\in$ qui s'est camouflé, tandis que le second est un $\subset$ déguisé.

L'étudiant le plus exigeant se plaindra peut-être de voir écrites des expressions comme $o(x+o(x))$ que les explications précédentes ne suffisent pas à expliquer. On lui répondra très brièvement que en convenant que pour A ensemble de fonctions $o(A)$ peut être défini comme l'ensemble des fonctions f qui sont négligeables devant un au moins des éléments de A et que cette définition supplémentaire permet, me semble-t-il, de finir de donner un sens à tous les calculs qui suivront.

3 - Produire des équivalents à partir des petits o

Le résultat suivant est de démonstration vide, mais essentiel car il explique l'utilité principale des développements limités :

Proposition 11-3-57 : Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbf{R}$ et a un réel adhérent à $\mathcal{D}$; soit f et g deux fonctions de $\mathcal{D}$ vers $\mathbf{R}$. Alors :

$$f(t) \sim g(t) \qquad \text{quand } t \to a \iff f(t) = g(t) + o[g(t)] \qquad \text{quand } t \to a.$$

Démonstration : La proposition me semble si importante que j'écris cette preuve bien qu'elle soit ennuyeuse :

quand $t \to a$, $f(t) \sim g(t)$ signifie qu'il existe un $\epsilon > 0$ et une fonction h de $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap \mathcal{D}$ vers $\mathbf{R}$ telle que pour t dans cet intervalle, $f(t) = h(t)g(t)$ et que $h(t)$ tende vers 1 quand $t \to a$.

D'un autre côté, $f(t) = g(t) + o[g(t)]$ signifie que $f - g$ est négligeable devant g, c'est-à-dire qu'il existe un $\epsilon > 0$ et une fonction k de $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap \mathcal{D}$ vers $\mathbf{R}$ telle que pour t dans cet intervalle, $f(t) - g(t) = k(t)g(t)$ et que $k(t)$ tende vers 1 quand $t \to a$.

Pour passer de l'un à l'autre, il suffit ainsi de poser $h = k + 1$ (ou $k = h - 1$).

•

4 - Propriétés élémentaires des petits o

Proposition 11-4-58 : $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbf{R}$ et a un réel adhérent à $\mathcal{D}$. Soit f, g deux fonctions de $\mathcal{D}$ vers $\mathbf{R}$. Alors :

a) $f \times o(g) = o(fg)$;
b) $o(f) \times o(g) = o(fg)$;
c) $o(f) + o(f) = o(f)$;
d) pour tout réel λ, $o(\lambda f) = o(f)$;
e) $o[o(f)] = o(f)$;
f) $o[f + o(f)] = o(f)$;
g) soit s_0 un réel, $\mathcal{D}_u$ une partie de $\mathbf{R}$ à laquelle s_0 est adhérent et u une fonction définie sur $\mathcal{D}_u$ et à valeurs dans $\mathcal{D}$ telle que $u(s) \to a$ quand $s \to s_0$. Alors
$o(f) \circ u = o(f \circ u)$
(où le o de gauche est un o quand $t \to a$ et celui de droite quand $s \to s_0$).

Démonstration : Simples vérifications toutes évidentes, qui nécessitent toutefois de comprendre ce que veulent exactement dire toutes les expressions manipulées. Comme j'ai autorisé à sauter la lecture des explications à leur sujet, la démonstration ne peut donc être lue par tous. Beau prétexte pour ne pas l'écrire.

•

Si je n'en ai pas oublié, ces sept formules sont les seules utilisées dans les calculs courants sur les petits o.

Tout va mieux que pour les équivalents : on sait faire quelque chose en cas d'addition, et le jeu des égalités diminue les chances de blocage en cas de composition.

On prendra toutefois garde à ce que **on ne peut pas dériver** une relation entre petits o : si $f = o(g)$, il se peut que f' ne soit pas $o(g')$.

5 - Réécriture de la formule de Taylor-Young sous forme mémorisable

Maintenant que les notations de Landau sont connues, le théorème de Taylor-Young se réécrit :
Réécriture du théorème de Taylor-Young
Théorème 11-5-17 : Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle I et soit a un point de I ; soit $n \geq 1$ un entier. On suppose que f est (au moins) n fois dérivable au point a. Alors, quand $t \to a$:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + o[(t-a)^n].$$

6 - Développements limités des fonctions classiques

Le formulaire regroupé page suivante est à savoir ; les démonstrations des formules ont été faites en cours :