

Chapitre 9 - Les deux formules de Taylor

Ce chapitre contient deux théorèmes bien distincts et à ne pas confondre. Le premier d'entre eux généralise la formule des accroissements finis, le second généralise la définition de dérivée.

1 - Un peu de vocabulaire

Les concepts définis ci-dessous sont bien connus de tous, et il est vivement recommandé de ne pas regarder avec trop d'attention les définitions ci-dessous, qui m'ont demandé la plus grande attention (toujours ces problèmes de restrictions...) mais n'en méritent pas autant de votre part. (N'oubliez tout de même pas de connaître la terminologie "de classe \mathcal{C}^n ").

Définition 9-1-86 : (présentée sous forme récursive, qui mêle cette définition, la suivante et la notation qui les suit) Soit $n \geq 2$ un entier. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, définie sur un ensemble \mathcal{D}_f et soit a un point de \mathcal{D}_f . On dit que f est n fois dérivable en a lorsqu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que f soit $n - 1$ fois dérivable en tous les points de $I \cap \mathcal{D}_f$, et que $f^{(n-1)}$ est elle-même dérivable en a . (On convient pour initier les récurrences que "1 fois dérivable" est synonyme de "dérivable", et, si on aime les cas dégénérés, on pourra même convenir que "0 fois dérivable" s'applique à n'importe quelle fonction en n'importe quel point et appliquer cette définition dès $n = 1$).

Définition 9-1-87 : Soit $n \geq 2$ un entier. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, définie sur un ensemble \mathcal{D}_f et soit \mathcal{E}_n l'ensemble des points où f est n fois dérivable. L'application de \mathcal{E}_n vers \mathbf{R} qui associe à un réel a la valeur en a de la dérivée de $f^{(n-1)}$ est appelée la **dérivée n -ème de f** . (On convient pour initier les récurrences que la "dérivée 1-ème de f " est f' , et même, si on aime les cas dégénérés, que sa dérivée 0-ème est elle-même).

Notation 9-1-41 : La dérivée n -ème d'une fonction f est notée $f^{(n)}$. (Pour les petites valeurs de n on peut utiliser des apostrophes : f'' pour $f^{(2)}$, etc...)

Définition 9-1-88 : On dit qu'une fonction réelle d'une variable réelle est n fois dérivable sur son ensemble de définition (ou sur un intervalle ouvert contenu dans celui-ci) lorsqu'elle est n fois dérivable en tout point de cet ensemble (ou intervalle ouvert).

Définition 9-1-89 : On dit qu'une fonction réelle d'une variable réelle est n fois continûment dérivable sur son ensemble de définition (ou sur un intervalle ouvert contenu dans celui-ci) (ou "de classe \mathcal{C}^n ") lorsqu'elle y est n fois dérivable et que sa dérivée n -ème est continue. On complète cette définition en définissant "de classe \mathcal{C}^0 " comme synonyme de "continu" et "de classe \mathcal{C}^∞ " comme signifiant "de classe \mathcal{C}^n pour tout $n \geq 0$ ".

2 - Le théorème de Taylor-Lagrange

Le lemme qui suit n'est pas à retenir. Il est destiné à mettre au maximum en relief l'analogie entre le théorème des accroissements finis et le théorème de Taylor-Lagrange. Le plan de la preuve est le même : le lemme est une variante améliorée du théorème de Rolle, puis on passe du lemme au théorème par utilisation d'une fonction auxiliaire pas trop compliquée.

Lemme 9-2-3 : Soit f une fonction réelle définie sur le segment $[a, b]$ ($a \neq b$) et soit $n \geq 0$ un entier. On suppose f de classe \mathcal{C}^n sur le segment $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur le segment $]a, b[$.

On suppose en outre que $f(a) = f(b)$ et que $f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$. Alors il existe un c strictement entre a et b tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Démonstration : C'est une récurrence sur l'entier n .

* Cas où $n = 0$. La condition énumérative " $f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$ " est alors une condition vide, et l'énoncé est exactement celui du théorème de Rolle. Le résultat est donc déjà connu.

* Soit un $n \geq 1$ fixé ; supposons le lemme vrai pour la valeur $n - 1$ et montrons le pour la valeur n . Soit f comme dans l'énoncé. On peut dans un premier temps lui appliquer le théorème de Rolle, obtenant ainsi un point c_1 strictement compris entre a et b tel que $f'(c_1) = 0$. On remarque alors que $f'(a) = f'(c_1)$, ce qui invite à appliquer le lemme à l'ordre $n - 1$ à la fonction f' sur le segment $[a, c_1]$ (si on est pointilleux, on dira "à la restriction de f' au segment $[a, c_1]$ "). Cette fonction est en effet de classe \mathcal{C}^{n-1} sur le segment fermé

$[a, c_1]$, et n fois dérivable sur le segment ouvert $]a, c_1[$. Il existe donc un point c strictement compris entre a et c_1 (et *a fortiori* strictement compris entre a et b) tel que $f^{(n)}(c) = 0$, soit $f^{(n+1)}(c) = 0$. •

Théorème 9-2-15 : Soit f une fonction réelle définie sur le segment $[a, b]$ ($a \neq b$) et soit $n \geq 0$ un entier. On suppose f de classe \mathcal{C}^n sur le segment $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur le segment $]a, b[$.

Alors il existe un c strictement entre a et b tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)\frac{(b-a)}{1!} + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration : Le principe est le même que pour le théorème des accroissements finis : la fonction f ne vérifie *a priori* pas toutes les égalités $f(a) = f(b)$ ni $f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$; on la remplace par une fonction vérifiant toutes ces égalités ; on applique le “super-Rolle” qui précède, et on conclut.

On pourrait parachuter d’un seul coup une fonction auxiliaire qui marche. Cela donne une démonstration vérifiable mais un peu mystérieuse. En décomposant la difficulté en deux morceaux, on verra —je l’espère— un peu mieux comment s’organisent les calculs.

Dans un premier temps, montrons le théorème de Taylor-Lagrange pour les fonctions g vérifiant l’hypothèse supplémentaire (évidemment des plus restrictives !) : $g'(a) = g''(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0$. Pour pouvoir appliquer “super-Rolle” il manque seulement l’égalité des valeurs prises par g en a et en b .

Pour obtenir cette égalité, on va modifier g par l’addition d’une fonction de la forme $\lambda(t-a)^{n+1}$; une telle expression a en effet le bon goût d’avoir des dérivées nulles en a jusqu’à la n -ème incluse, donc de ne pas perturber ce qui fonctionnait bien chez g tout en prenant des valeurs différentes en a et en b , donc en pouvant amender la tare originelle de g .

Posons, conformément à ce programme :

$$g_1(t) = g(t) + \frac{(t-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} (g(a) - g(b)).$$

Ainsi, pour tout t du segment fermé $[a, b]$:

$$g_1'(t) = g'(t) + (n+1)\frac{(t-a)^n}{(b-a)^{n+1}} (g(a) - g(b))$$

donc $g_1'(a) = g'(a) + 0 = 0$.

Puis, pour tout t du segment fermé $[a, b]$:

$$g_1''(t) = g''(t) + n(n+1)\frac{(t-a)^{n-1}}{(b-a)^{n+1}} (g(a) - g(b))$$

donc on garde bien encore la bonne propriété $g_1''(a) = 0$.

Tout continue pour le mieux jusqu’à la dérivée n -ème de g , encore nulle en a . Sur notre élan, nous pouvons même calculer (mais pour les seuls t du segment ouvert $]a, b[$) :

$$g_1^{(n+1)}(t) = g^{(n+1)}(t) + (n+1)!\frac{1}{(b-a)^{n+1}} (g(a) - g(b)).$$

La nullité des n premières dérivées de g_1 au point a conjointement avec $g_1(a) = g_1(b)$ nous permet d’appliquer le lemme de “super-Rolle” ; on obtient donc un c strictement entre a et b tel que

$$g_1^{(n+1)}(c) = 0$$

c’est-à-dire

$$g^{(n+1)}(c) + (n+1)!\frac{1}{(b-a)^{n+1}} (g(a) - g(b)) = 0$$

ou encore, en regroupant le tout différemment :

$$g(b) = g(a) + \frac{g^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

qui est bien la formule de Taylor-Lagrange pour g (n'oublions pas que les dérivées de g en a sont nulles jusqu'à la n -ème...)

Il nous reste à montrer la formule pour la fonction f de l'énoncé dont aucune dérivée ne s'annule *a priori* en a . On va la modifier en ajoutant des facteurs polynomiaux de degré compris entre 1 et n dont la finalité est de modifier les dérivées au point a .

Posons donc, conformément à ce programme :

$$g(t) = f(t) - f'(a)(t-a) - f''(a)\frac{(t-a)^2}{2!} - \dots - f^{(n)}(a)\frac{(t-a)^n}{n!}.$$

On en déduit, pour tout t du segment fermé $[a, b]$:

$$g'(t) = f'(t) - f'(a) - f''(a)(t-a) - \dots - f^{(n)}(a)\frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

et en particulier $g'(a) = f'(a) - f'(a) - 0 - \dots - 0 = 0$.

On continue ainsi jusqu'à la dérivée n -ème et on pousse le calcul jusqu'à la dérivée $n+1$ -ème (ceci n'étant valide que pour t dans le segment ouvert $]a, b[$:

$$g^{(n+1)}(t) = f^{n+1}(t).$$

On peut alors appliquer le théorème de Taylor-Lagrange à g , qui vérifie l'hypothèse restrictive sous laquelle il est déjà connu.

On obtient l'existence d'un c tel que :

$$g(b) = g(a) + \frac{g^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

soit, en allant repêcher l'expression de g d'une part, l'expression de $g^{(n+1)}$ d'autre part :

$$f(b) - f'(a)(b-a) - f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} - \dots - f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} = f(a) - 0 - \dots - 0 + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3 - Le théorème de Taylor-Young

Ce théorème n'utilise qu'un seul point a , et donne une information précieuse sur le comportement quand t tend vers a d'une fonction de la variable réelle t supposée n fois dérivable au point a quand t tend vers a ($t \neq a$).

Il est intéressant de partir de la remarque suivante, qui n'est qu'une conséquence de la définition même de dérivée :

Remarque : Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un ensemble \mathcal{D}_f et soit a un point de \mathcal{D}_f . On suppose que $f'(a) = 0$. Alors :

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow a \text{ (} t \neq a \text{)}.$$

Il n'y a rien à prouver, c'est la définition même de la dérivée !

Le théorème de Taylor-Young n'est guère qu'une reformulation du lemme qui suit, qui généralise la remarque qui précède :

Lemme 9-3-4 : Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle I et soit a un point de I ; soit $n \geq 1$ un entier. On suppose que $f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$. Alors :

$$\frac{f(t) - f(a)}{(t-a)^n} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow a \text{ (} t \neq a \text{)}.$$

Démonstration : C'est, sans surprise, une récurrence sur l'entier n .

* Cas où $n = 1$: c'est la remarque qui précède, il n'y a rien à prouver !

* Soit un $n \geq 2$ fixé ; supposons le lemme vrai pour la valeur $n - 1$ et montrons le pour la valeur n .

Soit donc une fonction f qui ait ses n premières dérivées nulles en a . On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction f' qui a ses $n - 1$ premières dérivées nulles en a et obtenir :

$$\frac{f'(t)}{(t-a)^{n-1}} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow a \text{ (} t \neq a \text{)}$$

(la formule ne contient pas de terme $f'(a)$ puisqu'on a supposé $f'(a) = 0$).

Pour $t \in I$ ($t \neq a$), commençons alors à examiner le quotient $\frac{f(t) - f(a)}{(t-a)^n} = \frac{f(t) - f(a)}{t-a} \frac{1}{(t-a)^{n-1}}$.

Comme on a supposé $n \leq 2$, $f''(a)$ existe, donc il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que f' existe sur $I \cap J$; en utilisant plus ou moins implicitement la proposition 5-4-29, on travaillera pour t dans cet intervalle $I \cap J$. Dès lors que l'on prend t dans cet intervalle ($t \neq a$), f est dérivable (donc continue) sur tout le segment fermé $[a, t]$. On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis, et trouver un c_t strictement entre a et t tel que $\frac{f(t) - f(a)}{t-a} = f'(c_t)$, donc

$$\frac{f(t) - f(a)}{(t-a)^n} = f'(c_t) \frac{1}{(t-a)^{n-1}} = \frac{f'(c_t)}{(c_t-a)^{n-1}} \frac{(c_t-a)^{n-1}}{(t-a)^{n-1}}.$$

Remarquons maintenant que c_t est plus proche de a que t , ou, dit avec des formules, que $|c_t - a| \leq |t - a|$. Le quotient $\frac{(c_t - a)^{n-1}}{(t - a)^{n-1}}$ a donc une valeur absolue plus petite que 1 et on obtient la majoration :

$$0 \leq \left| \frac{f(t) - f(a)}{(t-a)^n} \right| \leq \left| \frac{f'(c_t)}{(c_t-a)^{n-1}} \right|.$$

Or $c_t \rightarrow a$ quand $t \rightarrow a$ ($t \neq a$), et $\frac{f'(t)}{(t-a)^{n-1}} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow a$ ($t \neq a$). Par composition des limites, on en déduit donc que $\frac{f'(c_t)}{(c_t-a)^{n-1}} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow a$ ($t \neq a$). En appliquant alors le principe des gendarmes, on conclut que :

$$\left| \frac{f(t) - f(a)}{(t-a)^n} \right| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow a \text{ (} t \neq a \text{)}.$$

En utilisant une fonction auxiliaire, on obtient, lorsqu'on supprime les hypothèses simplificatrices d'annulation de dérivées le

Théorème 9-3-16 : Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle I et soit a un point de I ; soit $n \geq 1$ un entier. On suppose que f est (au moins) n fois dérivable au point a . Alors :

$$\frac{f(t) - f(a) - f'(a)(t-a) - f''(a)\frac{(t-a)^2}{2!} - \dots - f^{(n)}(a)\frac{(t-a)^n}{n!}}{(t-a)^n} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow a$$

Démonstration :

La bonne fonction auxiliaire est la même que celle utilisée vers la fin de la preuve de Taylor-Lagrange : on introduira

$$g(t) = f(t) - f'(a)(t-a) - f''(a)\frac{(t-a)^2}{2!} - \dots - f^{(n)}(a)\frac{(t-a)^n}{n!}.$$

En récupérant les calculs faits plus haut, qui montrent que $g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0$, on peut appliquer le lemme à g et le théorème tombe alors aussitôt.