

## Aide-mémoire de trigonométrie

### 1 - Trigonométrie proprement dite

a - La formule circulaire :

Pour tout réel  $\theta$ ,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

b - Les dérivées :

Pour  $\theta$  variant là où ces formules ont un sens,

$$\frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta \quad \frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta \quad \frac{d}{d\theta} \tan \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta.$$

c - Les ensembles de définition, symétries et périodicités :

Le seul ensemble de définition à poser problème est celui de  $\tan$ .

Il y a des symétries par rapport à 0 et des périodicités, qu'on sait retrouver en mémorisant les courbes représentatives.

Il y a des relations entre  $\sin$  et  $\cos$ , qu'on reconstitue également ; notamment le sinus d'un réel  $\theta$  est égal au cosinus du complémentaire  $\frac{\pi}{2} - \theta$ .

d - Les formules d'addition :

Pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquels les formules ont un sens,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

d'où on déduit des formules de soustraction, et des formules de duplication, à savoir directement par cœur pour ne pas perdre de temps :

pour tout réel  $\theta$ ,

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta.$$

e - Formules plus avancées :

Il ne me semble pas indispensable de savoir par cœur plus de formules que celles énumérées ci-dessus, toutefois savoir qu'un certain nombre de formules existent et même savoir les reconstituer ne peut pas faire de mal :

$\sin 3\theta$  s'écrit simplement en fonction du seul  $\sin \theta$  ;

$\sin \alpha \sin \beta$  s'obtient à partir des formules pour  $\sin(\alpha + \beta)$  et  $\sin(\alpha - \beta)$  en les soustrayant et en constatant ce qu'on obtient — variantes possibles évidemment ;

$\sin p + \sin q$  s'obtient en introduisant  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $p = \alpha + \beta$  et  $q = \alpha - \beta$  puis en faisant comme dit au paragraphe précédent — variantes possibles évidemment ;

il existe des formules calculant  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  et  $\tan \theta$  en fonction de  $\tan(\theta/2)$ , utiles notamment pour calculer des primitives.

f - Les fonctions réciproques : leurs définitions

Arccos est défini sur  $[-1, 1]$  ; pour  $x$  dans cet intervalle,  $\text{Arccos } x$  est l'unique réel  $\theta$  de  $[0, \pi]$  tel que  $\cos \theta = x$ .

Arcsin est défini sur  $[-1, 1]$  ; pour  $x$  dans cet intervalle,  $\text{Arcsin } x$  est l'unique réel  $\theta$  de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  tel que  $\sin \theta = x$ .

Arctan est défini sur  $\mathbf{R}$  ; pour  $x$  réel,  $\text{Arctan } x$  est l'unique réel  $\theta$  de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\tan \theta = x$ .

g - Les fonctions réciproques : leurs dérivées

Pour  $x$  variant là où ces formules ont un sens

$$\frac{d}{dx} \text{Arcsin } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx} \text{Arccos } x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx} \text{Arctan } x = \frac{1}{1+x^2}.$$

On prendra garde à ce que pour  $\text{Arcsin}$  et  $\text{Arccos}$ , les formules de dérivation ne fonctionnent que dans l'intervalle ouvert  $]-1, 1[$ .

h - Les fonctions réciproques : autres formules

Du fait que le sinus de l'arc complémentaire est égal au cosinus, on montre sans mal que pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ , on a :  $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}$ .

On sait qu'il n'y a AUCUNE autre formule raisonnablement simple concernant les fonctions trigonométriques réciproques, et que si on en applique une, on se trompe !

## 2 - Trigonométrie hyperbolique

a - La formule hyperbolique :

Pour tout réel  $u$ ,

$$\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1$$

b - Les dérivées :

Pour  $u$  variant dans  $\mathbf{R}$ ,

$$\frac{d}{du} \text{sh } u = \text{ch } u \quad \frac{d}{du} \text{ch } u = \text{sh } u \quad \frac{d}{du} \text{th } u = \frac{1}{\text{ch}^2 u} = 1 - \text{th}^2 u.$$

c - Les ensembles de définition, symétries et périodicités :

Les trois fonctions sont définies sur  $\mathbf{R}$ .

Il y a des symétries par rapport à 0, qu'on sait retrouver en mémorisant les courbes représentatives.

Il n'y a pas de relations entre ch et sh (autre que celle du a)), ni de périodicités.

d - Les formules d'addition :

Pour tous réels  $a$  et  $b$  pour lesquels les formules ont un sens,

$$\text{sh}(a + b) = \text{sh } a \text{ch } b + \text{ch } a \text{sh } b \quad \text{ch}(a + b) = \text{ch } a \text{ch } b + \text{sh } a \text{sh } b \quad \text{th}(a + b) = \frac{\text{th } a + \text{th } b}{1 + \text{th } a \text{th } b}.$$

d'où on déduit des formules de soustraction, et aussi des formules de duplication qu'on pourra se dispenser de savoir par cœur tant on les retrouve vite et utilise relativement peu souvent.

e - Formules plus avancées :

Tout ce qui est dit en trigonométrie ordinaire se transpose ici.

f - Fonctions réciproques, leurs définitions :

Pour  $\text{Argsh}$  les choses sont simplissimes : c'est tout simplement la réciproque de sh.

Pour  $\text{Argth}$  les choses ne sont pas trop compliquées : il suffit de se souvenir qu'elle est définie sur  $] -1, 1[$  (c'est-à-dire l'intervalle image de  $\mathbf{R}$  par th) ; elle est alors simplement caractérisée par :  $\text{Argth } x$  est l'unique  $u$  réel tel que  $\text{th } u = x$ .

Pour  $\text{Argch}$  les choses sont aussi compliquées qu'en trigonométrie ordinaire, puisqu'il faut à la fois restreindre les ensembles de départ et d'arrivée de ch pour obtenir une bijection. On se souviendra donc soigneusement que  $\text{Argch}$  est définie sur  $[1, +\infty[$  (c'est-à-dire sur l'intervalle image de  $\mathbf{R}$  par ch) et est caractérisée par :  $\text{Argch } x$  est l'unique  $u$  réel positif tel que  $\text{ch } u = x$  (ne pas oublier le "positif").

On se souviendra (éventuellement...) qu'il existe des formules (qu'il n'est pas demandé d'apprendre) permettant d'exprimer les fonctions réciproques avec des racines carrées et des logarithmes ; ceci explique qu'on les rencontre assez peu souvent.

g - Les fonctions réciproques : leurs dérivées sont données, pour  $x$  variant dans les intervalles où ces formules ont un sens, par :

$$\frac{d}{dx} \text{Argsh } x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \frac{d}{dx} \text{Argch } x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \frac{d}{dx} \text{Argth } x = \frac{1}{1-x^2}.$$

On prendra garde à ce que pour  $\text{Argch}$ , la formule de dérivation ne fonctionne que dans l'intervalle ouvert  $]1, +\infty[$ .