Introduction à l'analyse numérique, TD1.
Autour du point fixe.

1 Attraction – répulsion – super-attraction.

Soient $F : I \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$ un point fixe de F.

1. On suppose $|F'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J de centre a, stable par F, et étudier la suite récurrente : $x_{n+1} = F(x_n), x_0 \in J$.
2. Sous les conditions de 1., on suppose de plus que F' ne s'annule pas sur J. Montrer que si $x_0 \neq a$ on a $x_n \neq a$ pour tout n et $x_{n+1} - a \sim F'(a)(x_n - a)$ pour $n \to \infty$ (convergence d'ordre un).
3. Sous les conditions de 1., on suppose maintenant que F est de classe $\mathcal{C}^2$, que $F'(a) = 0$ et que F'' ne s'annule pas sur J. Montrer que si $x_0 \in J$ et $x_0 \neq a$ on a $x_n \neq a$ pour tout n et $x_{n+1} - a \sim \frac{F''(a)}{2}(x_n - a)^2$ pour $n \to \infty$ (convergence d'ordre deux).
4. On suppose enfin $|F'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J de centre a tel que pour $x_0 \in J, x_0 \neq a$, la suite récurrente x_n sort de J.

2 Newton et la super-attraction.

Soit $f : [c, d] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $c < d, f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n), n \geq 0$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

1. Montrer que f a un zéro unique a. Montrer que pour tout $x \in [c, d]$, il existe z entre a et x tel que $F(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x - a)^2$.
2. Déduire de 1. qu'il existe $C > 0$ tel que $|F(x) - a| \leq C|x - a|^2$ pour tout $x \in [c, d]$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit stable par F. Montrer enfin que, pour chaque $x_0 \in I$, la suite x_n a une convergence d'ordre 2 vers a.
3. On suppose de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. Montrer que le résultat de 2. est valable avec l'intervalle $I = [a, d]$, que la suite x_n est alors strictement décroissante ou constante, et qu'on a $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$ quand $n \to \infty$; pour cet équivalent on suppose $x_0 > a$.
4. *Exemple* : on fixe $y > 0$ et on prend $f(x) = x^2 - y$. Résoudre alors la relation de récurrence et donner une estimation de l'erreur $|x_n - a|$ avec $a = \sqrt{y}$.
   Astuce : On pourra montrer que les nombres $(x_n - a)/(x_n + a)$ vérifient une relation de récurrence simple.

3 Méthode de la sécante.

La méthode de la sécante est une variante de la méthode de Newton dans laquelle la dérivée $f'(x_n)$ est remplacée par le taux d'accroissement : $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$. Ceci permet d'éviter d'avoir à évaluer la dérivée.
Soit $f : [c,d] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $c < d$, et a un zéro de f tel que $f'(a) \neq 0$. On considère la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}), n > 0$ avec $F(x,y) = x - \frac{f(x)(x-y)}{f(x)-f(y)}$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour $(x_0, x_1) \in V^2$ la suite construite par la formule précédente soit correctement définie. Etudier alors cette suite.
2. On suppose de plus que $f''(a) \neq 0$ et on pose $e_n = x_n - a$. Quitte à restreindre V, montrer qu'il existe $C > 0, q \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |e_n| \leq Cq^{\alpha^n}$$

avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4 Point fixe et équations différentielles : théorème de Cauchy-Lipschitz.

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ une application continue supposée globalement lipschitzienne en y au sens suivant : pour tout intervalle compact $K \subset I$ il existe $k > 0$ tel que pour tout $t \in K, y, z \in \mathbf{R}^m$ on a $\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k\|y - z\|$ pour une norme quelconque sur $\mathbf{R}^m$.
Le but de l'exercice est de montrer que le système différentiel $y' = f(t,y), y(t_0) = x$ avec $t_0 \in I$ et $x \in \mathbf{R}^m$ donnés, admet alors une solution unique définie sur I tout entier. On suppose dans les questions 1. à 4. que I est compact et on note $E = \mathcal{C}(I, \mathbf{R}^m)$ muni de la norme infinie. Pour $y \in E$ et $t \in I$ on définit $F(y)(t) = x + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$.

1. Montrer que le système différentiel équivaut à $y \in E$ et $F(y) = y$.
2. Soit l la longueur de I. Montrer que F est lipschitzienne sur E de rapport kl. Peut-on en déduire le résultat souhaité ?
3. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$ l'application itérée F^p est lipchitzienne de rapport $(kl)^p/(p!)$.
4. Conclure lorsque I est compact.
5. Etendre le résultat à un intervalle I quelconque.
6. *Exemples* : appliquer ce qui précède au système linéaire à coefficients constants $y' = Ay,\ y(0) = x$ et à l'équation du pendule : $u'' = -\sin u, u(0) = a, u'(0) = b$.
7. Continuité par rapport à la condition initiale.
   a. Soient v, α, β trois fonctions réelles continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, avec $a < b$ et $\beta \geq 0$ sur $[a,b]$. On suppose que pour tout $t \in [a,b]$,

$$v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)v(s)ds.$$

Montrer que pour tout $t \in [a,b]$,

$$v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) exp\left(\int_s^t \beta(u)du\right) ds.$$

b. Soit $t_0 \in I$. On définit l'application $\varphi : (t,a) \to \varphi(t,a)$ telle que $\forall (t,a), \frac{\partial \varphi(t,a)}{\partial t} = f(t, \varphi(t,a)), \varphi(t_0, a) = a$.
Montrer que φ est $K(t)$-lipschitzienne par rapport à a.

c. En déduire que φ est continue.

Remarque : Lors de la recherche de solutions approchées pour un système différentiel, il est souvent nécessaire d'approcher également la condition initiale. La continuité de la solution par rapport à la donnée initiale permet de justifier que l'on fasse cette approximation.

8. *Autre exemple* : Peut-on appliquer le théorème dans le cas suivant ?

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & & (t,y) & \to & y^2. \end{array}$$

Montrer que le système $y' = y^2, y(0) = 1$ admet une unique solution et la déterminer. Que dire du temps maximal d'existence ?
Remarque : On a le théorème plus général suivant : *Soient U un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour toute donnée initiale $(t_0, x) \in U$, le système différentiel $y' = f(t,y), y(t_0) = x$ admet une solution unique.*