Introduction à l'analyse numérique, TD2.
Différences finies – Euler implicite.

1 Méthode des différences finies pour un problème aux limites en dimension 1.

On considère le problème suivant : étant données deux fonctions $c, f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et deux constantes α, β, trouver $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ qui vérifie le *problème aux limites* :

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ pour } x \in]0,1[, u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \tag{1}$$

Remarque : *On admettra que si on suppose $c \geq 0$ sur $[0,1]$ alors ce problème a une unique solution de classe $\mathcal{C}^2$, qu'on notera φ ; et que $\varphi \in \mathcal{C}^4([0,1])$.*
Étant donné $N \geq 1$ on pose $h = \frac{1}{N+1}$ et on définit un maillage uniforme de pas h de l'intervalle $[0,1]$ comme étant l'ensemble des points $x_i = ih$ pour $i = 0 \ldots N$.
La méthode des différences finies est un moyen d'obtenir une approximation de la solution φ aux noeuds x_i du maillage, c'est-à-dire qu'on cherche un vecteur $u_h = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^t \in \mathbf{R}^N$ tel que u_i soit proche de $\varphi(x_i)$ pour $i = 1 \ldots N$, la qualité de l'approximation étant d'autant meilleure que le pas est petit.

1. a. Montrer qu'il existe $\theta_i \in]-1,1[, i = 1 \ldots N$ tels que

$$-\varphi''(x_i) = \frac{-\varphi(x_{i-1}) + 2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})}{h^2} + \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h).$$

   b. Afin d'alléger l'écriture on écrit $\varphi_i = \varphi(x_i), c_i = c(x_i), f_i = f(x_i), i = 1 \ldots N$. On pose $\varphi_h = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)^t$ et $f_h = (f_1 + \frac{\alpha}{h^2}, f_2, \ldots, f_{N-1}, f_N + \frac{\beta}{h^2})^t$; trouver le vecteur $\varepsilon_h(\varphi)$ ainsi que la matrice A_h tels que $\varepsilon_h(\varphi) \to 0$ quand $h \to 0$ et le système se réécrive sous la forme

$$A_h \varphi_h = f_h + \varepsilon_h(\varphi).$$

   c. Comme il n'est pas possible de calculer explicitement φ_h, nous allons négliger le terme $\varepsilon_h(\varphi)$ et chercher la solution u_h de l'équation :

$$A_h u_h = f_h.$$

   Montrer que A_h est définie positive. On en déuit que u_h est bien défini.

2. a. **Définition** : *On dit qu'une matice carrée réelle M est* monotone *si elle est inversible et si la matrice M^{-1} est positive, c'est-à-dire que tous les éléments m_{ij}*

sont positifs, où $(m_{ij})_{i,j} = M^{-1}$.

Montrer qu'une matrice M est monotone si et seulement si l'inclusion

$$\{v \in \mathbf{R}^n : Mv \geq 0\} \subset \{v \in \mathbf{R}^n : v \geq 0\}$$

est satisfaite.

b. Montrer que A_h est monotone. En déduire l'existence de u_h.

3. On rappelle que dans $\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ la norme $|||\cdot|||_\infty$ est définie par

$$|||M|||_\infty = \max_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1,\ldots,N} |m_{i,j}|.$$

a. Soit $e = (1,\ldots,1)^t \in \mathbf{R}^N$; montrer que $|||A_h^{-1}|||_\infty = \|A_h^{-1}e\|_\infty$.

b. Soit $A_{0,h}$ la matrice A_h obtenue lorsque $c = 0$. Montrer que $|||A_{0,h}^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{8}$.
Indication : on introduira le problème suivant $-u''(x) = 1$ *pour* $x \in]0,1[$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

c. Montrer que $|||A_h^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{8}$.
Indication : On remarquera que $A_{0,h}^{-1} - A_h^{-1} = A_{0,h}^{-1}(A_h - A_{0,h})A_h^{-1}$.

4. Montrer que la majoration

$$\|u_h - \varphi_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{0\leq x\leq 1} |\varphi^{(4)}(x)|$$

est satisfaite.

Remarque : Ainsi, on a montré que cette méthode d'approximation d'un opérateur différentiel (dite des *différences finies*) est ici d'ordre 2 en ce sens que l'erreur, mesurée ici par $\|u_h - \varphi_h\|_\infty$ est un $O(h^2)$. Cet exemple permet d'introduire quelques idées générales en analyse numérique des équations différentielles et aux dérivées partielles :

a. Le choix de la norme n'est pas évident a priori : il a fallu ici que $|||A_h^{-1}|||_\infty$ soit majorée uniformément. Ceci correspond à la notion de *stabilité*.

b. La convergence dépend également du comportement asymptotique de *l'erreur de consistance* mesurée ici par $\|\varepsilon_h(\varphi)\|_\infty$.

2 Résolution numérique des systèmes différentiels par Euler implicite.

On s'intéresse à l'approximation de la solution d'un système

$$\begin{array}{l} u'(t) = f(t,u) \text{ pour } t \in [0,T], \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbf{R}^d \text{ (conditions initiales) .} \end{array} \tag{2}$$

On supposera toujours que f est continue par rapport à t et L-lipschitzienne par rapport à u.

Soit $h > 0$, tel que $T = Nh$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$; on pose $t_k = kh$ pour $n \in \mathbb{N}$, on cherche à approcher la solution $u(t_k)$ de (2) par U_k, donné par un schéma de la forme :

$$U_{k+1} - U_k = hF(t_k, U_k, h), \tag{3}$$

U_0 étant une approximation de u_0, F –définie sur $[0,T] \times \mathbf{R}^d \times [0, h^*]$– restant à déterminer. Par exemple, pour *Euler explicite*, on prend $F(t_k, U_k, h) = f(t_k, U_k)$.
Définition : *L'approximation du système (2) par le schéma général à un pas (3) est dit* convergente*, si quel que soit u_0 on a $\lim_{h\to 0} \max_k |u(t_k) - U_k| = 0$.*
Définition : *Le schéma (3) est dit* stable *s'il existe une constante M telle que , $\forall U_0 \in \mathbf{R}^d, \forall V_0 \in \mathbf{R}^d, \forall h \leq h^*$ et pour toute suite ε_j, les suites U_j et V_j définies par les relations $U_{j+1} = U_j + hF(t_j, U_j, h)$, $V_{j+1} = V_j + hF(t_j, V_j, h) + \varepsilon_j$ vérifient l'estimation :*

$$\forall j, |U_j - V_j| \leq M \left(\left| U_0 - V_0 + \sum_{k=0}^{j-1} |\varepsilon_j| \right| \right).$$

Défnition : *Le schéma (3) est dit* consistant *avec (2) si pour toute solution u de l'équation (2) on a $\lim_{h\to 0} \sum_j |u(t_{j+1}) - u(t_j) - hF(t_j, u(t_j), h)| = 0$* (l'erreur locale est petite)*.*

1. a. Montrer que, pour F continue en t, u, h, si $\forall t \in [0,T], \forall u \in \mathbf{R}^d$, on a $F(t, u, 0) = f(t, u)$, alors le schéma est consistant.
   b. Montrer que, si $(a_j)_{j\geq 0}$, $(b_j)_{j\geq 0}$ suites de réels positifs vérifient $a_{j+1} \leq (1+K)a_j + b_j$, alors $a_j \leq e^{Kj}a_0 + \sum_{k=0}^{j-1} b_k e^{K(j-k-1)}$.
   Indication : On rappelle que $1 + x \leq e^x, \forall x \geq 0$. On pourra poser $\alpha_j = e^{-Kj}a_j$.
   c. Montrer que, si il existe C tel que $\forall t \in [0,T]$, $\forall u, v \in \mathbf{R}^d$, $\forall h \leq h^*$, $|F(t, u, h) - F(t, v, h)| \leq C|u - v|$, alors le schéma est stable.
2. **Formules eulériennes :** Déterminer, pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, $u_0 \in \mathbf{R}^d$:

$$\lim_{k\to\infty} \left(Id + \frac{tA}{k} \right)^k u_0 \text{ et } \lim_{k\to\infty} \left(Id - \frac{tA}{k} \right)^{-k} u_0.$$

   On étudie désormais le schéma (3) pour $F(t_k, U_k, h) = f(t_{k+1}, U_{k+1})$. Cette définition est implicite puisque U_{k+1} est à déterminer. Il faut donc tout d'abord montrer que ce schéma est bien défini, puis déterminer $F(t_k, U_k)$ seulement en fonction de t_k et U_k.
3. a. Montrer que le système $x = y + hf(t, x)$ admet une unique solution pour $0 \leq h \leq h_0$, notée $G(t, y, h)$.
   b. Montrer que G est lipschitzienne par rapport à y.
   c. Montrer que $\forall h \in]0, h_0[$, $\forall U_k \in \mathbf{R}^d$, U_{k+1} est défini uniquement par le schéma (3) où on a remplacé $F(t_k, U_k, h)$ par $f(t_{k+1}, U_{k+1})$. On se place à présent dans ce cadre. Déterminer la fonction F afin de réécrire le schéma sous la forme (3) et non plus implicitement.
   d. Montrer que le schéma est consistant.

e. Montrer que pour h assez petit le schéma est stable.

f. Calcul de l'erreur. Soit $e_n = U_n - u(t_n)$. Montrer que

$$|e_n| \leq (1 + hL_1)\frac{e^{L_1(t_n - t_0)} - 1}{L_1}\omega(h, u') + e^{L_1(t_n - t_0)}|e_0|$$

où $\omega(\delta, g) = \max\{|g(t') - g(t)| : (t, t') \in [t_0, t_0 + T], |t - t'| \leq \delta\}$.