Introduction à l'analyse numérique, TD3.
Accélération de convergence – Intégration numérique.

1 Méthode Δ^2 d'Aïtken

Soit $\bar{x} \in \mathbf{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle ne prenant jamais la valeur $\bar{x}$. On suppose qu'il existe un coefficient $k \in [0;1[$ et une suite auxiliaire $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} - \bar{x} = (k + z_n)(x_n - \bar{x}).$$

On définit l'opérateur Δ par :

$$\begin{array}{cccc} \Delta & : & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \rightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ & & (x_n)_{n\in\mathbf{N}} & \rightarrow & (\Delta x_n)_{n\in\mathbf{N}} \end{array}$$

où $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

1. Montrer que pour n assez grand on peut définir le réel x'_n par :

$$x'_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

2. Montrer que cette suite vérifie de plus : $\frac{x'_n - \bar{x}}{x_n - \bar{x}} \to 0$ quand $n \to \infty$.

2 Méthodes d'intégration de Newton-Cotes

On se place sur l'intervalle $[a,b]$ et pour tout n on définit une subdivision de l'intervalle en posant $h = \frac{b-a}{n}, x_i = a+ih, 0 \leq i \leq n$. On pose de plus $\pi_{n+1} = \Pi_{i=0}^{n}(X - x_i) \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$

1. a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ il existe des coefficients réels uniques $\lambda_{n,i}, 0 \leq i \leq n$ tels que

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n,i} P(x_i).$$

Montrer que ces $\lambda_{n,i}$ sot indépendants de l'intervalle $[a,b]$.

b. Montrer que pour tout $i, \lambda_{n,i} \in \mathbf{Q}, \lambda_{n,i} = \lambda_{n,n-i}$ et $\sum_{i=0}^{n} \lambda_{n,i} = n$.

c. Montrer que si n est un entier pair, alors l'égalité montrée en a. est encore vraie pour $P \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$.

Remarque : Les méthodes étudiées ici sont des méthodes de quadrature. Nous allons voir dans la suite que pour une fonction f donnée sur $[a,b]$ elles fournissent une approximation de l'intégrale $\int_a^b f$. Les résultats des questions a. et c. nous donnent une minoration de l'ordre de ces méthodes : par n quand n est impair et par $n+1$ quand n est pair.

2. On suppose dans cette question que n est pair ($n = 2p$). On désigne par ψ_{n+2} la primitive de π_{n+1} qui s'annule en $x = a$ et pour tout $0 \leq k \leq n-1, I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \pi_{n+1}(x)dx$. Montrer que :

   a. $\forall 0 \leq k \leq p-1, I_{2k+1} \leq 0 \leq I_{2k}$,

   b. $\forall 0 \leq k \leq p-1, \psi_{n+2}(x_{n-k}) = \psi_{n+2}(x_k)$,

   c. $\forall 0 \leq k \leq p-1, |I_{k+1}| \leq |I_k|$,

   d. $\forall x \in [a,b], \psi_{n+2}(x) \geq 0$.

   Pour tout $n \geq 1$ et toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, on désigne par $P_n \in \mathbf{R}_n[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé aux points $x_i, 0 \leq i \leq n$. On note E_n l'erreur d'interpolation : $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ et g_n la fonction définie par : $g_n = \frac{E_n}{\pi_{n+1}}$.

3. a. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2$ alors $g_n \in \mathcal{C}^1$.

   b. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^{n+2}$ alors pour tout x il existe ξ_x, η_x tels que $g_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, g_n'(x) = \frac{f^{(n+2)}(\eta_x)}{(n+2)!}$.

4. a. $n = 2p$; soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}$. Montrer qu'il existe $\eta \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n,i} f(x_i) + \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \left(\int_0^n t^2(t-1)\ldots(t-n)dt \right) h^{n+3}.$$

   b. $n = 2p+1, f \in \mathcal{C}^{n+1}$. Montrer qu'il existe $\eta \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n,i} f(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \left(\int_0^n t(t-1)\ldots(t-n)dt \right) h^{n+2}.$$

   Remarque : On peut obtenir ainsi une estimation de l'erreur de quadrature dans le cas de méthodes de Newton-Cotes simples. Nous allons détailler cette estimation dans le cas de formules composées.

5. On fixe $n \geq 1$. Pour tout entier $p \geq 1$ on pose $\delta = \frac{b-a}{p}, t_k = a + k\delta, 0 \leq k \leq p$. On obtient ainsi une subdivision de $[a,b]$. En vue d'utiliser la méthode de Newton-Cotes sur chaque intervalle de la subdivision on définit les $x_{k,i} = t_k + i\delta/n$ et $T_p(f) = \frac{\delta}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n,i} f(x_{k,i})$. C'est ce qu'on appelle les méthodes de Newton-Cotes composées.

   a. Montrer que $T_p(f) \to \int_a^b f(x)dx$ quand $p \to \infty$.

   b. Donner une majoration de l'erreur de quadrature $\left| \int_a^b f(x)dx - T_p(f) \right|$ si $n = 2q$ et $f \in \mathcal{C}^{n+2}$ d'une part et si $n = 2q+1$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ d'autre part.