Introduction à l'analyse numérique, TD4.
Interpolation et approximation polynômiales.

1 Lien entre l'intégration numérique et la résolution approchée d'équations différentielles.

On part du problème de Cauchy suivant : trouver $u \in \mathcal{C}^1([t_0, t_0+T], \mathbf{R}^m)$ tel que $y'(t) = f(t, y(t))$ et $y(t_0)$ fixé ; et on essaye de chercher des solutions approchées. On a déjà vu les méthodes d'Euler permettant d'en trouver, nous allons ici voir un moyen de construire d'autres méthodes.
Considérons un pas de temps h, c'est-à-dire que l'on va poser : $t_n = t_0 + nh$, et intégrons l'équation entre t_n et t_{n+1} : $y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$. On utilise maintenant une méthode d'intégration numérique pour évaluer l'intégrale et on en déduit un schéma de résolution d'équations différentielles.

1. Que dire si la méthode d'intégration choisie est la méthode des rectangles à gauche ?
2. la méthode des rectangles à droites ?
3. la méthode des trapèzes ?
   Remarque : Ces méthodes pour l'intégration nous amènent à des méthodes d'ordre 1 pour les résolutions d'équations différentielles. D'autres méthodes d'intégration peuvent mener à un ordre supérieur.
4. (a) Que dire de la méthode du point milieu ?
   (b) Comment adapter la méthode du point milieu pour obtenir un schéma de résolution explicite ?
   Remarque : Ceci nous permet d'obtenir un schéma explicite de type Runge-Kutta, d'ordre 2. On peut généraliser ce type de méthode.

2 Polynômes orthogonaux.

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert borné ou non de $\mathbf{R}$. On se donne un poids w sur $]a, b[$, i.e. une fonction positive et continue sur $]a, b[$. On suppose que pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$, on a

$$\int_a^b |P(x)|w(x)dx < \infty. \tag{1}$$

On note alors E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $]a, b[$ telles que :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx} < \infty.$$

Grâce à l'hypothèse (1), E contient tous les polynômes. On munit E du produit scalaire naturel $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$ et on note d_2 la distance associée.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes unitaires $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, p_n étant de degré n, orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire de E.
   Montrer que cette suite est unique. Ces polynômes sont appelés polynômes orthogonaux pour le poids w.
2. Montrer que pour n fixé, n supérieur ou égal à deux, il existe deux constantes λ_n et μ_n que l'on précisera telles que $p_n(x) = (x - \lambda_n)p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x)$.
3. Montrer que p_n possède n zéros distincts dans l'intervalle $]a, b[$.
4. Soit $f \in E$, montrer qu'il existe un unique polynôme $r_n \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $\|f - r_n\|_2 = d_2(f, \mathbf{R}_n[X])$.
5. On suppose $]a, b[$ borné, soit $f \in E$ et r_n le polynôme de la question précédente, montrer que $\lim_{n\to\infty} \|f - r_n\|_2 = 0$.

3 Polynômes de Tchébychev.

On prend $]a, b[=] - 1, 1[$ et pour $x \in] - 1, 1[$, $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$. Montrer que dans ce cas, les polynômes de l'exercice précédent sont, à une constante près les polynômes de Tchébychev, qui vérifient la relation $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

4 Polynômes de Legendre.

On prend $]a, b[=] - 1, 1[$ et pour $x \in] - 1, 1[$, $w(x) = 1$. Les polynômes de l'exercice 1 sont alors appelés polynômes de Legendre, sauf que par convention, on suppose ici que ces polynômes prennent la valeur 1 en 1. On note L_n ces polynômes et k_n le coefficient de plus haut degré de L_n.

1. Montrer que pour $n \geq 0$, on a
$$((1 - x^2)L'_n)' + n(n + 1)L_n = 0.$$
2. Montrer que pour $n \geq 0$, L_n est donné par
$$L_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((1 - x^2)^n).$$
3. En déduire, pour $n \geq 0$, la valeur de k_n.
4. Montrer que, pour $n \geq 0$, le polynôme L_n vérifie
$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \frac{1}{n + 1/2}.$$
5. On note désormais, pour simplifier les ca lculs,
$$L_n^* = \sqrt{n + 1/2}L_n$$
   et k_n^* le coefficient dominant de L_n^*. Montrer que pour $n \geq 2$, on a
$$L_n^*(x) = \frac{k_n^*}{k_{n-1}^*}xL_{n-1}^*(x) - \frac{k_n^* k_{n-2}^*}{k_{n-1}^{*2}}L_{n-2}^*(x).$$

6. Montrer la formule de Christoffel-Darboux : pour $n \geq 0$, on a, pour tout x et y dans $]-1,1[$,

$$L_0^*(x)L_0^*(y) + \cdots + L_n^*(x)L_n^*(y) = \frac{k_n^*}{k_{n+1}^*} \frac{L_{n+1}^*(x)L_n^*(y) - L_{n+1}^*(y)L_n^*(x)}{x-y}.$$

5 Formules gaussiennes.

Étant donné n noeuds sur $[-1,1]$, pour un poids égal à 1, on recherche la position de ces noeuds pour avoir une méthode d'intégration numérique d'ordre maximal.

1. Montrer qu'il existe une unique formule d'ordre maximal égal à $2n-1$, qu'il s'agit d'une formule par interpolation construite en prenant pour noeuds les zéros du $(n+1)$ème polynôme orthogonal. On notera ξ_j, $1 \leq j \leq n$ ces noeuds.
2. Montrer que les poids $\lambda_j, 1 \leq j \leq n$, sont donnés par :

$$\lambda_j = \frac{2}{nL_n'(\xi_j)L_{n-1}(\xi_j)}.$$