TP scilab 2

1 Graphisme

(a) Construire f et tracer le graphe de f pour :
- $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, régulière,
- $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, régulière périodique (i.e. les valeurs de f et de ses dérivées sont identiques en 0 et en 1),
- $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, fonction en escalier (avec au moins une discontinuité dans $]0,1[$)
- $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, continue, affine par morceaux (non C^1 sur $]0,1[$).

(b) Tracer sur le même graphique le graphe des fonctions $P_k : x \to x^k$ pour $k = 0...3$.

2 Interpolation de Lagrange

(a) Programmer la recherche du polynôme d'interpolation de f aux points (x_i) par la méthode des différences divisées.

(b) L'appliquer à différentes fonctions f pour des (x_i) fixés. Illustrer graphiquement.

(c) Soit $f_\alpha : x \in [-1,1] \to \frac{1}{x^2+\alpha^2}$. Rechercher le polynôme d'interpolation de f_α :
- en des points (x_i) équidistribués sur $[-1,1]$,
- aux points de Tchebychev.

Application numérique : $\sqrt{8}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$. Qu'observe-t-on ?

3 Recherche de racines

Programmer la recherche de racines pour un polynôme P et illustrer la graphiquement pour les 2 méthodes suivantes :

(a) par dichotomie,

(b) par la méthode de Newton.

4 Rappels sur l'interpolation de Lagrange

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ points de $[a,b]$ distincts 2 à 2. On rappelle que le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $(x_i)_{i=0\ldots n}$ est l'unique $P_n \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $0 \le i \le n$.

Une méthode simple et efficace pour calculer P_n est la méthode des différences divisées :

Méthode des différences divisées :

- Pour $0 \leq k \leq n$,
$$f[x_k] = f(x_k)$$
et, pour $1 \leq k \leq n$,
$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$
La quantité $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ est appelée différence divisée d'ordre k de f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_k$.
- Reconstruction du polynôme :
$$P_n(X) = f[x_0] + (X - x_0)\Big(f[x_0, x_1] + (X - x_1)\big(f[x_0, x_1, x_2] + \ldots \\ (X - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\big)\Big).$$
Avec la récurrence descendante :
$$Q_n(X) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \tag{1}$$
$$Q_k(X) = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] + (X - x_k) Q_{k+1}(X), \quad 0 \leq q \leq n, \tag{2}$$
on aboutit à $P_n(X) = Q_0(X)$.

Points de Tchebychef

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \quad i = 0 \ldots n.$$

5 Méthode de Newton

La méthode de Newton permet de calculer les racines d'un polynôme P. Par exemple, si P a toutes ses racines réelles, si ξ est la plus grande racine de P et $x_0 > \xi$ la méthode de Newton permet d'approcher ξ par les itérations suivantes :
$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}$$