TP 3 - Scilab

Exercice 1 `Stochastique : un péage`

Hypothèses :

- Les voitures arrivent selon un processus de Poisson, c'est-à-dire les intervalles entre les arrivées sont indépendants de loi exponentielle de paramètre λ.
- Au péage le temps de passage de chaque individu suit une loi exponentielle de paramètre μ, indépendamment de tout le reste.

1. Simuler une loi exponentielle : soit en utilisant l'aide et la fonction qui existe (`grand` pour les numériciens), soit en le programmant par inversion pour les probabilistes.
2. Représenter graphiquement le processus d'arrivée en fonction du temps.
3. *Rappel :* les lois exponentielles sont sans mémoire, donc après n'importe quel événement elles *repartent de zéro*, $P(X > t|\text{événement dépendant de } X \text{ avant } t \text{ et autre}) = P(X > t)$, ce qui fera de la file d'attente un chaîne de Markov. Représenter graphiquement la file d'attente.
4. Dans le cas $\mu > \lambda$ illustrer la convergence vers la mesure invariante.

Exercice 2 `Déterministe : schémas EDO`

1. **Introduction aux schémas à un pas**

   On considère l'équation différentielle ordinaire :

   $$\dot{y} = y^2, \quad y(0) = 1.$$

   (a) Résoudre cette équation numériquement avec la méthode d'Euler explicite sur $[0, 1]$.
   (b) Résoudre cette équation numériquement avec la méthode RK4 sur $[0, 1]$.
   (c) Illustrer et calculer l'ordre de la méthode d'Euler.

2. **Attracteur de Lorenz**

   On considère le système de Lorenz :

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= s(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

   avec $s = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$, $x0 = 5$, $y0 = -8$, $z0 = 6$.

   (a) Résoudre ce système numériquement avec la méthode d'Euler explicite sur $[0, 1]$.
   (b) Résoudre cette équation numériquement avec la méthode RK4 sur $[0, 1]$.

3. Précisions sur les schémas

Pour résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est “suffisamment” régulière, les méthodes à un pas sont des méthodes numériques relativement élémentaires qui permettent de calculer une solution approchée pour ce problème. Elles se mettent sous la forme :

$$\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n), 0 \leq n \leq N, \\ \text{avec } h_n = t_{n+1} - t_n. \end{array}$$

Les méthodes à un pas les plus fréquemment utilisées sont la méthode d'Euler et la méthode de Runge Kutta ”classique” (RK4) définies respectivement par

$$\begin{array}{l} n = 0, 1, \ldots \\ \quad y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ n = 0, 1, \ldots \\ \quad p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ \quad t_{n,2} = t_n + \frac{1}{2} h_n \\ \quad y_{n,2} = y_n + \frac{1}{2} h_n p_{n,1} \\ \quad p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ \quad y_{n,3} = y_n + \frac{1}{2} h_n p_{n,2} \\ \quad p_{n,3} = f(t_{n,2}, y_{n,3}) \\ \quad y_{n,4} = y_n + h_n p_{n,3} \\ \quad t_{n+1} = t_n + h_n \\ \quad p_{n,2} = f(t_{n+1}, y_{n,4}) \\ \quad y_{n+1} = y_n + h_n \left(\frac{1}{6} p_{n,1} + \frac{1}{3} p_{n,2} + \frac{1}{3} p_{n,3} + \frac{1}{6} p_{n,4} \right) \end{array}$$