TD d'analyse numérique - option B

Soit $\alpha < \beta$. Soit $\omega :]\alpha;\beta[\to \mathbf{R}_+^*$ donné. Soit $l > 0$ et $n > 0$ avec $l \leq n+1$. Soit $(x_i)_{l \leq i \leq n}$ une famille de points distincts extérieurs à $]\alpha;\beta[$.

1. Montrer qu'il existe une unique famille $(x_i)_{0 \leq i \leq l-1}$ de points distincts de $]\alpha;\beta[$ (à permutation près) et une unique famille $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que la méthode de quadrature

$$\int_\alpha^\beta f(x)\omega(x)dx \sim \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

soit d'ordre au moins $n + l$. De plus les l points intérieurs sont les racines du $(l+1)-$ième polynôme orthogonal sur $]\alpha;\beta[$ associé au poids

$$\theta(x) = \omega(x) \prod_{i=l}^{n} (x - x_i).$$

2. Montrer que cette méthode est exactement d'ordre $n + l$.

3. Montrer qu'il existe une et une seule méthode de quadrature (avec un poids $\omega(x)$ donné) à $n+1$ points dans $]\alpha, \beta[$ et qui soit d'ordre $2n+1$. Vérifier que les scalaires λ_i sont strictement positifs.

4. Calculer les points de Gauss pour $\alpha = -1, \beta = 1$ dans les cas suivants :

   a. $\omega(x) = 1$,

   b. $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.