# TD d'analyse numérique - tronc commun

## 1 Conditionnement.

**Définition 1** *Soit une norme subordonnée* $|||\cdot|||$ *sur* $M_n(\mathbf{R})$*. Le* conditionnement *d'une matrice* $A \in GL_{n(\mathbf{R})}$ *par rapport à cette norme est le réel positif* $cond(A) = |||A||| \cdot |||A^{-1}|||$.

1. Minorer cond$A$. Calculer le conditionnement de $A^{-1}, \lambda A$.
2. Que vaut cond$_2 A$ où $A$ est symétrique. Montrer que cond$_2 A = 1$ si et seulement si $A = \alpha Q$ avec $Q \in O_n$.
3. Soit $A$ et $A'$ deux matrices inversibles et $b, b'$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^n, b \neq 0$. Soit $u$ et $u'$ les solutions des systèmes $Au = b$ et $Au' = b'$. Montrer que l'on a alors :
$$\frac{\|u - u'\|}{\|u\|} \leq \mathrm{cond} A \frac{\|b - b'\|}{\|b\|}.$$
Montrer de même que si $u$ et $u'$ sont les solutions des systèmes $Au = b, A'u' = b$ alors :
$$\frac{\|u - u'\|}{\|u\|} \leq \mathrm{cond} A \frac{|||A - A'|||}{|||A|||}(1 + O(|||A - A'|||)).$$

## 2 Résolution de système différentiel : méthode d'Euler implicite.

On s'intéresse à l'approximation de la solution d'un système

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = f(t, u) \text{ pour } t \in [0, T], \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbf{R}^d \text{ (conditions initiales) .} \end{array} \right. \tag{1}$$

On supposera toujours que $f$ est continue par rapport à $t$ et $L$-lipschitzienne par rapport à $u$. Soit $h > 0$ tel que $T = Nh$ pour un certain $N \in \mathbf{N}$ ; on pose $t_k = kh$ pour $k \in \mathbf{N}$. On cherche à approcher la solution $u(t_k)$ de (1) par $U_k$, donné par un schéma de la forme :

$$U_{k+1} - U_k = hF(t_k, U_k, h), \tag{2}$$

$U_0$ étant une approximation de $u_0$, $F$, définie sur $[0, T] \times \mathbf{R}^d \times [0, h^*]$, restant à déterminer. Par exemple, pour *Euler explicite*, on prend $F(t_k, U_k, h) = f(t_k, U_k)$.

**Définition 2** *L'approximation du système (1) par le schéma général à un pas (2) est dite* convergente *si quel que soit* $u_0$*, on a*
$$\lim_{h \to 0} \max_k |u(t_k) - U_k| = 0.$$

**Définition 3** *Le schéma (2) est dit* stable *s'il existe une constante $M$ telle que* , $\forall U_0 \in \mathbf{R}^d, \forall V_0 \in \mathbf{R}^d, \forall h \leq h^*$ *et pour toute suite $\varepsilon_j$, les suites $U_j$ et $V_j$ définies par les relations*

$$\begin{cases} U_{j+1} = U_j + hF(t_j, U_j, h), \\ V_{j+1} = V_j + hF(t_j, V_j, h) + \varepsilon_j, \end{cases}$$

*vérifient l'estimation :*

$$\forall j, |U_j - V_j| \leq M \left( \left| U_0 - V_0 + \sum_{k=0}^{j-1} |\varepsilon_j| \right| \right).$$

**Définition 4** *Le schéma (2) est dit* consistant *avec (1) si pour toute solution $u$ de l'équation (1) on a*

$$\lim_{h \to 0} \sum_j |u(t_{j+1}) - u(t_j) - hF(t_j, u(t_j), h)| = 0$$

(l'erreur locale est petite).

1. a. Montrer que, pour $F$ continue en $t, u, h$, si $\forall t \in [0,T], \forall u \in \mathbf{R}^d$, on a $F(t, u, 0) = f(t, u)$, alors le schéma est consistant.

   b. Montrer que, si $(a_j)_{j \geq 0}$, $(b_j)_{j \geq 0}$ suites de réels positifs vérifient $a_{j+1} \leq (1 + K)a_j + b_j$, alors $a_j \leq e^{Kj} a_0 + \sum_{k=0}^{j-1} b_k e^{K(j-k-1)}$.
   *Indication : On rappelle que $1 + x \leq e^x, \forall x \geq 0$. On pourra poser $\alpha_j = e^{-Kj} a_j$.*

   c. Montrer que, si il existe $C$ tel que $\forall t \in [0,T]$, $\forall u, v \in \mathbf{R}^d$, $\forall h \leq h^*$, $|F(t, u, h) - F(t, v, h)| \leq C|u - v|$, alors le schéma est stable.

   On étudie désormais le schéma (2) pour $F(t_k, U_k, h) = f(t_{k+1}, U_{k+1})$. Cette définition est implicite puisque $U_{k+1}$ est à déterminer. Il faut donc tout d'abord montrer que ce schéma est bien défini, puis déterminer $F(t_k, U_k)$ seulement en fonction de $t_k$ et $U_k$.

2. a. Montrer que le système $x = y + hf(t, x)$ admet une unique solution pour $0 \leq h \leq h_0$, notée $G(t, y, h)$.

   b. Montrer que $G$ est lipschitzienne par rapport à $y$.

   c. Montrer que $\forall h \in ]0, h_0[$, $\forall U_k \in \mathbf{R}^d$, $U_{k+1}$ est défini uniquement par le schéma (2) où on a remplacé $F(t_k, U_k, h)$ par $f(t_{k+1}, U_{k+1})$. On se place à présent dans ce cadre. Déterminer la fonction $F$ afin de réécrire le schéma sous la forme (2) et non plus implicitement.

   d. Montrer que le schéma est consistant.

   e. Montrer que pour $h$ assez petit, le schéma est stable.

# 3 Polynômes orthogonaux.

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert borné ou non de $\mathbf{R}$. On se donne un poids $w$ sur $]a, b[$, i.e. une fonction positive et continue sur $]a, b[$. On suppose que pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$, on a

$$\int_a^b |P(x)| w(x) dx < \infty. \tag{3}$$

On note alors $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $]a, b[$ telles que :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx} < \infty.$$

Grâce à l'hypothèse (3), $E$ contient tous les polynômes. On munit $E$ du produit scalaire naturel $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx$ et on note $d_2$ la distance associée.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes unitaires $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $p_n$ étant de degré $n$, orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire de $E$.
   Montrer que cette suite est unique. Ces polynômes sont appelés polynômes orthogonaux pour le poids $w$.
2. Montrer que pour $n$ fixé, $n$ supérieur ou égal à deux, il existe deux constantes $\lambda_n$ et $\mu_n$ que l'on précisera telles que $p_n(x) = (x-\lambda_n)p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x)$.
3. Montrer que $p_n$ possède $n$ zéros distincts dans l'intervalle $]a,b[$.
4. Soit $f \in E$, montrer qu'il existe un unique polynôme $r_n \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $\|f-r_n\|_2 = d_2(f,\mathbf{R}_n[X])$.
5. On suppose $]a,b[$ borné, soit $f \in E$ et $r_n$ le polynôme de la question précédente, montrer que $\lim_{n\to\infty}\|f-r_n\|_2 = 0$.

# 4 Polynômes de Legendre.

On prend $]a,b[=]-1,1[$ et pour $x \in ]-1,1[$, $w(x) = 1$. Les polynômes de l'exercice 1 sont alors appelés polynômes de Legendre, sauf que par convention, on suppose ici que ces polynômes prennent la valeur 1 en 1. On note $L_n$ ces polynômes et $k_n$ le coefficient de plus haut degré de $L_n$.

1. Montrer que pour $n \geq 0$, on a
$$((1-x^2)L_n')' + n(n+1)L_n = 0.$$
2. Montrer que pour $n \geq 0$, $L_n$ est donné par
$$L_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^n).$$
3. En déduire, pour $n \geq 0$, la valeur de $k_n$.
4. Montrer que, pour $n \geq 0$, le polynôme $L_n$ vérifie
$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \frac{1}{n+1/2}.$$
5. On note désormais, pour simplifier les calculs,
$$L_n^* = \sqrt{n+1/2}L_n$$
   et $k_n^*$ le coefficient dominant de $L_n^*$. Montrer que pour $n \geq 2$, on a
$$L_n^*(x) = \frac{k_n^*}{k_{n-1}^*}xL_{n-1}^*(x) - \frac{k_n^* k_{n-2}^*}{k_{n-1}^{*2}}L_{n-2}^*(x).$$
6. Montrer la formule de Christoffel-Darboux : pour $n \geq 0$, on a, pour tout $x$ et $y$ dans $]-1,1[$,
$$L_0^*(x)L_0^*(y) + \cdots + L_n^*(x)L_n^*(y) = \frac{k_n^*}{k_{n+1}^*}\frac{L_{n+1}^*(x)L_n^*(y) - L_{n+1}^*(y)L_n^*(x)}{x-y}.$$

7. En déduire que pour tout $n$ et tout réel $x$ on a :

$$L_n^*(x)L_{n+1}^{*'}(x) - L_n^{*'}(x)L_{n+1}^*(x) = \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*}\sum_{k=0}^{n} L_k^{*2}(x).$$

**Application :** On note pour tout $n$ : $x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n}$ les $n$ racines du polynôme $L_n$ dans $]-1;1[$. Montrer que pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$ :

$$x_{k,n+1} < x_{k,n} < x_{k+1,n+1},$$

c'est-à-dire que deux racines consécutives de $L_{n+1}$ sont séparées par une racine de $L_n$.

# 5 Formules gaussiennes.

**Définition 5** *On appelle* formule de quadrature *à $n$ points sur $\mathcal{C}(I)$ toute fonctionnelle linéaire $\varphi_n$ définie par :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k})$$

*où $n$ est un entier naturel non nul, $(x_{n,k})_{0\le k\le n}$ une suite de points deux à deux distincts dans l'intervalle $I$ et $(\lambda_{n,k})_{0\le k\le n}$ une suite de réels non tous nuls.*

Le but d'une méthode de quadrature est d'approcher $\int_I f(x)\pi(x)dx$. C'est donc dans cet esprit qu'on définit l'ordre d'une méthode de quadrature.

**Définition 6** *Une méthode de quadrature à $n$ points sur $\mathcal{C}(I)$ est dite d'*ordre $p$ *si elle est exacte sur $\mathbf{R}_p[X]$ et inexacte pour au moins un polynôme de degré strictement supérieur à $p$.*

Étant donné $n$ noeuds sur $[-1,1]$, pour un poids égal à 1, on recherche la position de ces noeuds pour avoir une méthode d'intégration numérique d'ordre maximal.

1. Montrer qu'il existe une unique formule d'ordre maximal égal à $2n-1$, qu'il s'agit d'une formule par interpolation construite en prenant pour noeuds les zéros du $(n+1)$ème polynôme orthogonal. On notera $\xi_j$, $1 \le j \le n$ ces noeuds.

2. Montrer que les poids $\lambda_j, 1 \le j \le n$, sont donnés par :

$$\lambda_j = \frac{2}{nL_n'(\xi_j)L_{n-1}(\xi_j)}.$$

**Références** :


- Lascaux-Théodor
- Schatzman, Demailly
- Rombaldi : cours et exercices
- Schatzman, Rombaldi, Demailly