(*exemple texte session 2006*)

Résumé : On montre sur un exemple simple, comment on peut, sous certaines conditions, tuer une onde se propageant dans un domaine Ω, en agissant sur une partie Γ_0 du bord du domaine Ω.

Mots Clefs: Equation des ondes, Séries de Fourier.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Quelques préliminaires

On commence par rappeler comment on peut obtenir la solution de l'équation des ondes par la méthode de Fourier. En dimension un, on obtient des formules explicites lorsque les données sont définies par des séries. On notera avec un point $(\dot{a}, \dot{b}, \ldots)$ la dérivée par rapport à la variable t représentant le temps. L'équation des ondes sur $\Omega \times [0,T]$ avec $T > 0$ et $\Omega =]0,1[$, avec des conditions de Dirichlet homogènes et un second membre $f(x,t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ &y(x,0) = y^{(0)}(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y^{(1)}(x), \quad x \in \Omega \\ &y(0,t) = y(1,t) = 0 \quad t \in [0,T] \end{aligned} \tag{1}$$

Pour résoudre cette équation, on introduit les solutions de $-\dfrac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = \lambda_k w_k, \quad w_k(0) = w_k(1) = 0$, pour $\lambda_k = k^2\pi^2$ (appelées fonctions propres du Laplacien), qui forment une base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$:

$$w_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k} x)^1 \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

[1] Les fonctions $w_k(x)$ sont définies à une constante multiplicative près : les fonctions $\sqrt{2} w_k(x)$ sont de norme 1 dans $L^2(0,1)$

et on cherche une solution de (1) sous la forme :

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t)w_k(x) \tag{3}$$

On suppose que les données initiales $y^{(0)}(x)$ et $y^{(1)}(x)$ vérifient $y^{(0)}(0)=y^{(0)}(1)=y^{(1)}(0)=y^{(1)}(1)=0$ et sont données aussi par les séries :

$$y^{(0)}=\sum_{k=1}^{\infty}y_k^{(0)}w_k \quad \text{et} \quad y^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}y_k^{(1)}w_k. \tag{4}$$

De même, on suppose que la fonction second membre f est donnée par :

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)w_k(x). \tag{5}$$

En portant (3) dans (1), on obtient le système d'équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{ll} \ddot{a}_k(t)+\lambda_k a_k(t)=b_k(t) & k=1,2,\dots \\ a_k(0)=y_k^{(0)}, & \dot{a}_k(0)=y_k^{(1)} \end{array}\right. \tag{6}$$

dont l'unique solution s'écrit :

$$a_k(t)=y_k^{(0)}\cos(k\pi t)+\frac{y_k^{(1)}}{k\pi}\sin(k\pi t)+\frac{1}{k\pi}\int_0^t \sin(k\pi(t-\tau))b_k(\tau)d\tau. \tag{7}$$

En posant

$$a_k^{(l)}(t)=y_k^{(0)}\cos(k\pi t)+\frac{y_k^{(1)}}{k\pi}\sin(k\pi t), \tag{8}$$

$$a_k^{(f)}(t)=\frac{1}{k\pi}\int_0^t \sin(k\pi(t-\tau))b_k(\tau)d\tau, \tag{9}$$

on voit donc que la solution y s'écrit sous la forme :

$$y(x,t)=y^{(l)}(x,t)+y^{(f)}(x,t) \tag{10}$$

où

$$y^{(l)}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(l)}(t)w_k(x)$$

(onde libre) ne dépend que des conditions initiales et où

$$y^{(f)}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(f)}(t)w_k(x)$$

(onde forçée) ne dépend que du second membre f. On remarque que la fonction $t\mapsto y^{(l)}(x,t)$ est périodique de période $T^{(l)}=2$. Lorsque la fonction second membre $f(x,t)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x,t)=g(x)h(t),\ \text{avec } h(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\{h_m^{(1)}\cos(m\pi t)+h_m^{(2)}\sin(m\pi t)\} \text{ et } g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k w_k(x) \tag{11}$$

il est possible de calculer plus explicitement $y^{(f)}$, qui est alors en général non bornée (phénomène de résonance). On obtient[2] :

(12)
$$\frac{a_k^{(f)}(t)}{g_k} = \frac{1}{k\pi}\sum_{m\neq k}\{h_m^{(1)}\ \frac{k\cos(m\pi t)-k\cos(k\pi t)}{\pi(k^2-m^2)} + h_m^{(2)}\ \frac{k\sin(m\pi t)-m\sin(k\pi t)}{\pi(k^2-m^2)}\}$$
$$+h_k^{(1)}\ \frac{t\sin(k\pi t)}{2k\pi} + h_k^{(2)}\ \frac{\sin(k\pi t)-k\pi t\cos(k\pi t)}{2k^2\pi^2}.$$

En particulier, pour $T=2$, on a simplement :

(13)
$$a_k^{(f)}(T) = -g_k\frac{h_k^{(2)}}{k\pi}.$$

Dans la suite on aura besoin aussi de $\dot{a}_k^{(f)}(T)$. En dérivant (12) on obtient (toujours pour $T=2$) :

(14)
$$\dot{a}_k^{(f)}(T) = g_k h_k^{(1)}.$$

2. Un problème de type anti-bruit

On considère une onde se propageant dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ. En d'autres termes, on considère un système dont l'état $y=y(x,t)$ satisfait à :

(15)
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = 0 \text{ dans } Q=\Omega\times[0,T], \quad T>0 \text{ fixé, où } \Delta = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

On suppose que l'on peut agir sur le système par l'intermédiaire d'une fonction (le contrôle) $v=v(x,t)$ définie sur une partie $\Sigma_0=\Gamma_0\times[0,T]$, du bord $\Gamma\times[0,T]$, fixant à chaque instant la valeur de y sur Γ_0 (condition de Dirichlet) :

(16)
$$\begin{cases} y(x,t)=v(x,t) & \text{pour} \quad (x,t)\in\Sigma_0 \\ y(x,t)=0 & \text{pour} \quad (x,t)\in(\Gamma\backslash\Gamma_0)\times[0,T] \end{cases}$$

On se donne par ailleurs des données initiales (de Cauchy) $(y^{(0)},y^{(1)})$ telles que :

(17)
$$y(x,0)=y^{(0)}(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=y^{(1)}(x).$$

Les équations (15), (16) et (17) définissent, sous certaines hypothèses de régularité, la fonction y de manière unique. On va considérer le problème suivant :

[2]En utilisant les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^t \sin(\alpha(t-s))\cos(\beta s)ds &= \alpha(\cos(\beta t)-\cos(\alpha t))/(\alpha^2-\beta^2) \quad \text{si } \alpha\neq\beta \\
&= t\sin(\alpha t)/2 \quad \text{si } \alpha=\beta \\
\textstyle\int_0^t \sin(\alpha(t-s))\sin(\beta s)ds &= (\alpha\sin(\beta t)-\beta\sin(\alpha t))/(\alpha^2-\beta^2) \quad \text{si } \alpha\neq\beta \\
&= (\sin(\alpha t)-\alpha t\cos(\alpha t))/(2\alpha) \quad \text{si } \alpha=\beta
\end{aligned}$$

Problème P : Soit $T > 0$ donné ainsi que le couple de fonctions $(y^{(0)}, y^{(1)})$, trouver un contrôle $v = v(x,t)$ défini sur Σ_0 tel que, si y_v désigne la solution de (15), (16), (17) associée à v, on ait :

$$y_v(x,T) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial y_v}{\partial t}(x,T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{18}$$

Ce type de problème se pose par exemple dans des applications anti-bruit : on cherche à annuler à l'instant T le bruit émis par une source sonore en agissant sur le système à l'aide d'une fonction $v(x,t)$ appropriée. On peut remarquer tout de suite que, à cause de la vitesse finie de propagation des ondes, pour satisfaire (18), il faut choisir T assez grand. Lorsque l'équation est en dimension un, on peut trouver simplement une solution à ce problème en utilisant les formules explicites (8) et (12) données par la méthode de Fourier.

On considère donc ici l'ouvert $\Omega =]0,1[$ et l'équation :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\
&y(x,0) = y^{(0)}(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y^{(1)}(x), \quad \text{pour } x \in \Omega \\
&y(0,t) = 0 \quad \text{pour } t \in [0,T] \\
&y(1,t) = v(t) \quad \text{pour } t \in [0,T]
\end{aligned} \tag{19}$$

Pour se ramener à des valeurs nulles au bord (conditions de Dirichlet homogènes), posons

$$z(x,t) = y(x,t) - xv(t) \tag{20}$$

La fonction z vérifie alors l'équation des ondes suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -x\ddot{v}(t), \qquad (x,t) \in]0,1[\times [0,T] \\
&z(x,0) = y^{(0)}(x) - xv(0), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = y^{(1)}(x) - x\dot{v}(0), \quad \text{pour } x \in]0,1[\\
&z(0,t) = z(1,t) = 0 \quad \text{pour } t \in [0,T]
\end{aligned} \tag{21}$$

On supposera pour simplifier que la fonction v peut être choisie telle que $v(0) = \dot{v}(0) = 0$ de sorte que $z(x,0) = y^{(0)}(x)$ et $\frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = y^{(1)}(x)$ dans (21). La fonction $z(x,t)$ peut se calculer à l'aide des formules (8) et (12) avec $g(x) = -x$ et $h(t) = \ddot{v}(t)$ dans (11). Il est clair que le problème P sera résolu si l'on peut trouver T et une fonction v définie sur $[0,T]$ telle que $z(x,T) = -xv(T)$ et $\dot{z}(x,T) = -x\dot{v}(T)$, conditions équivalentes à (18). En d'autres termes, on cherche une fonction v telle que l'onde libre $y^{(l)}(x,T)$ (qui est indépendante de v), soit annulée par l'onde forcée $y^{(f)}(x,T)$ (qui ne dépend que de v) à l'instant T, i.e. $y^{(l)}(x,T) + y^{(f)}(x,T) = 0$ et $\dot{y}^{(l)}(x,T) + \dot{y}^{(f)}(x,T) = 0$. Choisissons $T = T^{(l)} = 2$ (période de l'onde libre) de sorte que $y^{(l)}(x,T) = y^{(0)}(x)$ et $\dot{y}^{(l)}(x,T) = y^{(1)}(x)$ et cherchons une fonction v périodique de période $T = 2$ (et telle que $v(0) = \dot{v}(0) = 0$) donnée par sa série de Fourier :

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \{v_k^{(1)} \cos(k\pi t) + v_k^{(2)} \sin(k\pi t)\} \tag{22}$$

L'équation $z(x,T) = -xv(T) = 0$, équivalente à $y^{(l)}(x,T) = -y^{(f)}(x,T)$ est satisfaite si

$$a_k^{(l)}(T) = -a_k^{(f)}(T), \ \forall k, \tag{23}$$

et puisque $a_k^{(l)}(T) = a_k^{(l)}(0) = y_k^{(0)}$, on voit, en utilisant (13), que cette condition est satisfaite si

$$v_k^{(2)} = \frac{y_k^{(0)}}{k\pi x_k} \tag{24}$$

où x_k est le k-ième coefficient de la fonction $x \in]0,1[\mapsto x$ sur la base des w_k :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin(k\pi x) \qquad \text{avec} \quad x_k = 2\int_0^1 x \sin(k\pi x)dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} \tag{25}$$

On peut obtenir les coefficients $v^{(1)}$ en écrivant la condition $\dot{y}(x,T) = 0$, c'est-à-dire $\dot{z}(x,T) = -x\dot{v}(T) = 0$ (car $\dot{v}(T) = \dot{v}(0) = 0$), ce qui donne, en utilisant (14) :

$$v_k^{(1)} = -\frac{y_k^{(1)}}{k^2\pi^2 x_k} \tag{26}$$

Si la fonction v donnée par (22) avec pour coefficients de Fourier (24) et (26) vérifie les conditions $v(0) = \dot{v}(0) = 0$ alors c'est bien une solution du problème P au temps $T = 2$. Ainsi les calculs ci-dessus ne fournissent une solution que pour une certaine classe de données initiales $y^{(0)}$ et $y^{(1)}$.

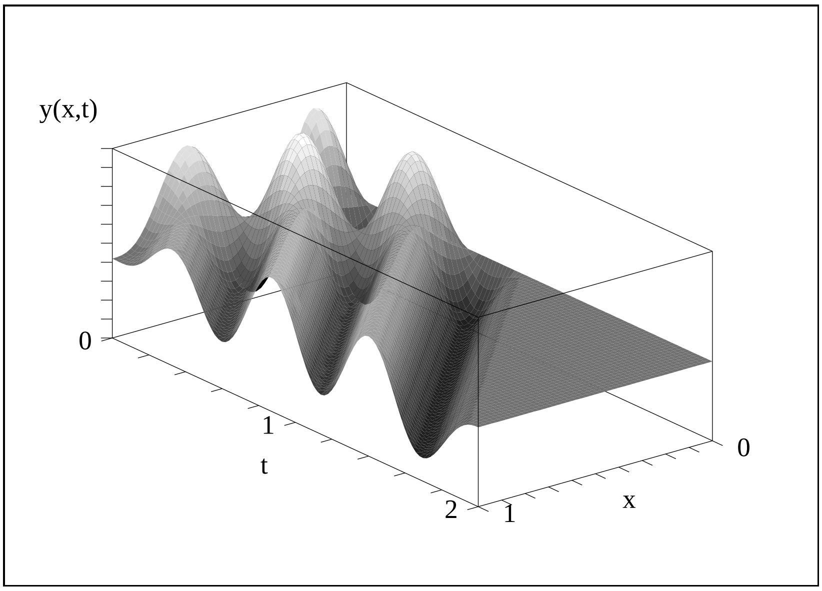

FIG. 1. Une onde tuée à t=2 par un contrôle sur le bord x=1

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

– Discuter la formulation du problème : réalisme et validité du modèle (contraintes, choix d'un critère à optimiser, résolution pratique, etc...).
– Ce texte propose une solution analytique pour un problème en dimension un. Les calculs exposés ici ne fournissent cette solution que si les données initiales vérifient certaines conditions que l'on pourra expliciter. Pourquoi cette restriction simplifie-t'elle l'analyse ? On pourra essayer de proposer une adaptation de la méthode dans le cas de données initiales quelconques.
– Discuter comment on peut justifier les calculs faits ici formellement (convergence des séries, etc).
– On a résolu le problème pour $T = 2$. Comment pourrait-on le résoudre pour $T = 4$? Discuter l'unicité du controle v (pour $T = 4$).
  On pourra montrer, dans le cadre de la dimension 1, que le problème P ne peut pas être résolu si T est trop petit.
– Le texte utilise la formule (25), i.e. $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin(k\pi x)$ avec $x_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi}$. Cette formule donne-elle numériquement une bonne approximation de x sur $]0,1[$? On pourra faire une illustration numérique.
– La figure du texte a été obtenue en définissant $y^{(0)}$ et $y^{(1)}$ comme deux fonctions ayant seulement leurs 4 premiers coefficients de Fourier non nuls, respectivement $(1,-1,2,9/4)$ et $(2,1,-2,10/3)$, puis en définissant la fonction $v(t)$ à l'aide de ses coefficients de Fourier *via* (24) et (26). On vérifie que l'on a $v(0) = \dot{v}(0) = 0$. La solution de (19) est alors calculée par les formules explicites du texte. On pourra s'inspirer de cet exemple comme illustration numérique.
– En dimension plus grande que 1, le calcul analytique des solutions de l'équation des ondes n'est plus aussi convivial, il faut alors envisager une résolution numérique de l'équation. Quel type de discrétisation pourrait-on proposer ?
  A titre d'exemple, on pourra comparer sur le problème du texte (en dimension 1 !) les solutions analytiques et numériques du problème contrôlé.

N.B. : Compte tenu des contraintes de temps, il n'est pas conseillé de programmer un schéma numérique en dimension strictement supérieure à un.