Systèmes de loi de conservation muni d'une entropie non-convexe

Mémoire de M2R

fait par Valérie Le Blanc sous la direction de Denis Serre

16 septembre 2005

Table des matières

Introduction

On considère un système de loi de conservation :

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha f^\alpha(u) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{1}$$

où $u(x,t) \in \mathbf{R}^n$ est l'inconnue et les f^α sont des fonctions régulières. On suppose que ce système est compatible avec la loi de conservation supplémentaire suivante :

$$\partial_t \eta(u) + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha q^\alpha(u) = 0, \tag{2}$$

dans laquelle η est une fonction scalaire telle que $\mathrm{D}^2\eta > 0$. En faisant le changement de variables $z = \mathrm{d}\eta(u)$, on constate que (1) est symétrisable au sens de Friedrichs et on en déduit que le problème de Cauchy associé à (1) est bien posé dans H^s pour $s > 1 + d/2$ (voir [3] ou [1]).

Par contre, dans le cas où on a pas $\mathrm{D}^2\eta > 0$, c'est-à-dire si η n'est pas strictement convexe, on ne sait a priori pas prouver l'existence de solutions pour (1), ce qui ne veut pas dire que le problème de Cauchy n'est pas bien posé. En particulier, Dafermos [3] a montré que dans le cas des sytèmes liés à l'elasticité il pouvait l'être (voir également [4]). Par ailleurs Brenier, [2] et Serre [5] ont traité le cas des modèles non-linéaires en électromagnétisme.

Dans tous les cas, la procédure est sensiblement la même. Le système (1) est supposé compatible avec d'autres lois de conservations dans lesquelles la quantité conservée est un vecteur P :

$$\partial_t P(u) + \sum_{\alpha} \partial_\alpha Q^\alpha(u) = 0 \tag{3}$$

De plus, il existe une fonction strictement convexe ϕ telle que :

$$\eta(u) = \phi(u, P(u)).$$

L'idée est alors d'élargir le système en augmentant le nombre d'inconnues : au lieu d'avoir u comme inconnue, on prend (u, P) et on cherche un système de loi de conservation dont ϕ puisse être une entropie et tel que si u est solution de (1) alors $(u, P(u))$ est solution du système élargi. Si un tel système existe, celui-ci est symétrisable car $\mathrm{D}^2\phi > 0$, ce qui assure l'existence et l'unicité de solutions au problème de Cauchy. Si de plus, pour toute donnée u_0 la solution classique du problème de Cauchy du système élargi pour la donnée initiale $(u_0, P(u_0))$ vérifie la propriété $P \equiv P(u)$, alors on obtient un théorème d'existence et d'unicité pour le système (1).

Mais la méthode n'est pas si simple à appliquer. Tout d'abord, le système élargi obtenu n'est pas forcément compatible avec une loi entropique. En particulier, dans le cas des équations de Maxwell, étudiées dans [5], le système élargi associé aux contraintes est compatible avec une loi entropique mais pas le système non-contraint. Il a donc été nécessaire de redémontrer l'existence et l'unicité de solutions pour le système élargi, ce qui est résumé dans le théorème 4 de l'article [5]. La première partie de mon rapport est consacrée à un point de la démonstration de ce théorème et consiste en la résolution d'un système linéaire contraint du second ordre.

Par ailleurs, l'obtention d'un système élargi n'est pas évidente a priori. Je me suis donc intéressée à un cas plus simple que ceux étudiés pour l'élasticité et pour la thermodynamique mais plus générique : le cas des systèmes non contraint en dimension 1 (pour la variable d'espace). La deuxième partie donne un élargissement du système et la troisième partie étudie les conséquences de l'élargissement afin d'obtenir des résultats d'unicité et d'existence.

Chapitre 1

Résolution d'un système du second ordre avec contrainte

1.1 Présentation du problème

Le but de cette partie est de résoudre un problème qui m'est apparu lors de la lecture de l'article [5]. En effet, afin de résoudre un problème de Cauchy pour un système du premier ordre non linéaire pour lequel on avait une estimation a priori, une linéarisation et une suite de Picard ont été utilisées. Mais, il apparaît qu'en fait le système obtenu par linéarisation n'est a priori pas symétrisable. Il a donc fallu trouver un nouveau système pour lequel on soit capable de montrer l'existence de solution au problème de Cauchy. Le système linéaire en question est alors un système du second ordre avec contrainte :

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha (A^\alpha u) = \sum_{\alpha=1,\beta=1}^{d,d} M^{\beta T} M^\alpha \partial_\alpha \partial_\beta u, \tag{1.1}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{d} M^\alpha \partial_\alpha u = 0, \tag{1.2}$$

avec $u(x,t) \in \mathbf{R}^n$ l'inconnue, $A^\alpha(x,t)$ une matrice $n \times n$ et M^α une matrice $m \times n$. Les matrices vérifient de plus les relations :

$$M^\beta A^\alpha + M^\alpha A^\beta \equiv 0, \qquad \forall \alpha, \beta, \tag{1.3}$$

$$A^\alpha = S^\alpha - N M^\alpha, \qquad \forall \alpha, \tag{1.4}$$

avec $S^\alpha(x,t)$ une matrice symétrique $n \times n$ et $N(x,t)$ une matrice $n \times m$.

Le problème est donc de prouver l'existence de solutions au problème de Cauchy associé à l'opérateur L auquel a été ajouté une contrainte linéaire

(1.2) où L est l'opérateur linéaire défini par :

$$Lu = \partial_t u + \sum_\alpha \partial_\alpha (A^\alpha u) - \sum_{\alpha,\beta} M^{\beta T} M^\alpha \partial_\alpha \partial_\beta u \tag{1.5}$$

Afin de résoudre ce problème, je me suis d'abord intéressée à un cas simple, celui de l'équation de la chaleur ; puis j'ai appliqué ce que j'ai ainsi appris au cas ci-dessus.

1.2 Résolution des équations de la chaleur par la méthode de la dualité

Habituellement, la résolution des équations de la chaleur se fait via la transformée de Fourier ou par d'autres méthodes assez directes. Mais ce type de démonstration ne peut pas s'appliquer au système (1.1)–(1.2). Pour avoir une méthode qui s'adapte à notre problème l'opérateur dual a été utilisé, même si ce n'est pas le moyen le plus direct pour résoudre l'équation de la chaleur. Cette méthode est en fait similaire à celle utilisée pour la résolution des systèmes hyperboliques (voir [3]).

Rappelons déjà que le système de la chaleur s'écrit :

$$\partial_t u = \Delta u, \tag{1.6}$$

avec $u(x,t) \in \mathbf{R}^n$; et notons L_c l'opérateur :

$$L_c = \partial_t - \Delta$$

La première étape pour la résolution du problème de Cauchy lié à ce système est l'obtention d'estimations a priori. Tout d'abord on estime $\|u\|_{L^2}$, et on obtient une estimation de la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|u\|_{L^2}^2 \leqslant \|u\|_{L^2}^2 + \|L_c u\|_{L^2}^2 ,$$

puis une estimation L^2 en utilisant un lemme de type Gronwall et en procédant à quelques majorations :

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant e^T \left(\|u(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|L_c u(\tau)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\tau \right). \tag{1.7}$$

On peut maintenant chercher des estimations H^s et pour cela commencer par définir l'opérateur d'ordre s, Λ_s :

$$\Lambda_s : u \to \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}(u)).$$

En constatant simplement que ∂_t et Λ_s commutent, ainsi que Δ et Λ_s, on obtient pour u : $\Lambda_s(L_c u) = L_c(\Lambda_s u)$. A partir de là, on applique (1.7) à $\Lambda_s u$ et obtient l'estimation a priori pour la norme H^s de u :

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 \leqslant e^T \left(\|u(0)\|_{H^s}^2 + \int_0^T \|L_c u(\tau)\|_{H^s}^2 \, \mathrm{d}\tau \right). \tag{1.8}$$

On cherche ensuite des estimations a priori pout le problème dual L_c^* qui doit vérifier la propriété : $\forall u \in H^s([0,T], \mathbf{R}^n), v \in H^{-s}([0,T], \mathbf{R}^n)$, tous deux à support compact en t, $\langle L_c u, v\rangle_{H^s,H^{-s}} = \langle u, L_c^* v\rangle_{H^s,H^{-s}}$. On a donc $L_c^* = -\partial_t - \Delta$.
Pour obtenir ces estimations, il suffit de trouver une relation entre $L_c u$ et $L_c^* v$. Or si $v(x,t) = u(x, T-t)$, alors $L_c^* v = \partial_t u - \Delta u = L_c u$. On peut donc appliquer l'estimation (1.8) pour $L_c u$ à $L_c^* v$:

$$\|v(t)\|_{H^s}^2 \leqslant e^T \left(\|v(T)\|_{H^s}^2 + \int_0^T \|L_c^* v(\tau)\|_{H^s}^2 \, \mathrm{d}\tau \right). \tag{1.9}$$

Maintenant que des estimations a priori sur L_c et L_c^* sont obtenues, on applique la même méthode que dans le cas des systèmes hyperboliques pour obtenir des résultats d'unicité et d'existence.

On obtient le théorème :

Théorème 1. *Soit $a \in H^s(\mathbf{R}^n), f \in L^2(0,T;H^s)$, alors il existe un unique u dans $\mathcal{C}([0,T], H^s)$ solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{aligned} L_c u &= f, \\ u(0) &= a. \end{aligned}$$

On a de plus :

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)}^2 \leqslant e^T \left(\|a\|_{H^s}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;H^s)}^2 \right).$$

1.3 Résolution du problème étudié

On va à présent démontrer le théorème suivant en utilisant la méthode vue précédemment :

Théorème 2. *Soit L l'opérateur défini dans la première section par :*

$$Lu = \partial_t u + \sum_\alpha \partial_\alpha (A^\alpha u) - \sum_{\alpha,\beta} M^{\beta T} M^\alpha \partial_\alpha \partial_\beta u$$

*sachant que les matrices A^α et M^α vérifient les relations (1.3)–(1.4).
Soit de plus $f \in L^2(0,T;H^s), a \in H^s(\mathbf{R}^n)$. Alors il existe une unique fonction u dans $\mathcal{C}([0,T],H^s)$, solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{aligned} Lu &= f, && (1.10)\\ u(0) &= a. && (1.11) \end{aligned}$$

On a de plus :

$$\|u\|^2_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} \leqslant C_{s,T}\left(\|a\|^2_{H^s} + \|f\|^2_{L^2(0,T;H^s)}\right).$$

Et enfin, si f et a sont tels que $\forall t$, $\sum_\alpha M^\alpha \partial_\alpha f(t) = 0$ et $\sum_\alpha M^\alpha \partial_\alpha a = 0$, alors u vérifie la contrainte :

$$\sum_\alpha M^\alpha \partial_\alpha u = 0. \tag{1.12}$$

Démonstration. Pour commencer la démonstration, cherchons des estimations a priori. Pour u suffisamment régulière on a :

$$\begin{aligned} \partial_t(u,u) + \textstyle\sum_\alpha \partial_\alpha(A^\alpha u, u) &= 2(u, Lu) + 2\textstyle\sum_{\alpha,\beta}(M^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta u, M^\beta u)\\ &\quad - \textstyle\sum_\alpha(u, \partial_\alpha(A^\alpha u)) + \sum_\alpha(A^\alpha u, \partial_\alpha u). \end{aligned}$$

On intègre cette égalité sur $\mathbf{R}^n$ puis on utilise l'identité connue sur A^α : $A^\alpha = S^\alpha - NM^\alpha$, avec S^α symétrique. On obtient :

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{L^2} + 0 &= 2\langle u, Lu\rangle_{L^2} - 2\|z\|^2_{L^2} - 2\textstyle\sum_\alpha \langle u, \partial_\alpha(A^\alpha u)\rangle_{L^2},\\ &= 2\langle u, Lu\rangle_{L^2} - 2\|z\|^2_{L^2} + 2\textstyle\sum_\alpha\langle u, NM^\alpha\partial_\alpha u\rangle_{L^2}\\ &\quad +2\langle u, \textstyle\sum_\alpha(\partial_\alpha N)M^\alpha u\rangle_{L^2} - \langle u, (\sum_\alpha \partial_\alpha S^\alpha)u\rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

en ayant posé $z := \sum_\alpha M^\alpha\partial_\alpha u$. Et, par conséquent :

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{L^2} + 2\|z\|^2_{L^2} &\leqslant \|Lu\|^2_{L^2} + (1+\tfrac{1}{C^2})\|u\|^2_{L^2} + C^2\|N\|^2_\infty\|z\|^2_{L^2}\\ &\quad + \|\textstyle\sum_\alpha(2\partial_\alpha NM^\alpha - \partial_\alpha S^\alpha)\|_\infty\|u\|^2_{L^2}. \end{aligned}$$

On a dû supposer ici que N et $2\partial_\alpha NM^\alpha - \partial_\alpha S^\alpha$ sont bornés sur $[0,T]$ par une constante. Si on choisit de plus C tel que $C^2\|N\|^2_\infty \leqslant 2$ on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{L^2} \leqslant C_T\|u\|^2_{L^2} + \|Lu\|^2_{L^2}. \tag{1.13}$$

Finalement, en utilisant le lemme de Gronwall et en majorant, on aboutit à l'estimation L^2 :

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|^2_{L^2} \leqslant C'_T\left(\|u(0)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|Lu\|^2_{L^2}\right).$$

On va à présent chercher une estimation pour la norme H^s de u. Pour cela, on réutilise l'opérateur pseudo-différentiel Λ_s vu précédemment et on écrit L sous la forme $L = \partial_t + P + Q$ où P est un opérateur différentiel d'ordre 1 et Q est un opérateur différentiel à coefficients constants. On évalue alors le crochet $[L, \Lambda_s] := L\Lambda_s - \Lambda_s L$:

$$[L, \Lambda_s] = [\partial_t, \Lambda_s] + [P, \Lambda_s] + [Q, \Lambda_s].$$

Mais, comme Q est à coefficients constants on a $Q\Lambda_s = \Lambda_s Q$ et par ailleurs $[\partial_t, \Lambda_s] = 0$. Enfin, on sait que $[P, \Lambda_s]$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $1 + s - 1 = s$ donc

$$[P, \Lambda_s] \in \mathcal{L}(H^s, L^2),$$

et, par conséquent,

$$\|L\Lambda_s u\|_{L^2} \leqslant \|\Lambda_s Lu\|_{L^2} + C_s \|u\|_{H^s} \leqslant \|Lu\|_{H^s} + C_s \|u\|_{H^s}.$$

On applique ensuite l'estimation L^2 (1.13) à $\Lambda_s u$ et on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|u\|_{H^s}^2 \leqslant (C_T + 2C_s^2) \|u\|_{H^s}^2 + 2 \|Lu\|_{H^s}^2.$$

En appliquant un lemme de type Gronwall, on en déduit l'estimation a priori :

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_{H^s}^2 \leqslant C_{s,T} \left(\|u(0)\|_{H^s}^2 + \int_0^T \|Lu\|_{H^s}^2 \right). \tag{1.14}$$

Cette dernière estimation va nous permettre de démontrer l'unicité de solutions au problème de Cauchy lié à l'opérateur L. En effet, soit $u, v \in \mathcal{C}(0, T; H^s)$ des solutions au problème de Cauchy associé à $a \in H^s$ et $f \in L^2(0, T; H^s)$. Alors, u et v vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = f \\ u(0) = a \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{l} Lv = f \\ v(0) = a \end{array} \right. ,$$

et $w = v - u$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} Lw = 0, \\ w(0) = 0. \end{array} \right.$$

Donc $\partial_t w(t) = P(t)w(t)$ au sens des distributions par rapport à t avec $t \to P(t) \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{L}(H^s, H^{s-2}))$. Or $w \in \mathcal{C}(0, T; H^s)$, donc $w \in \mathcal{C}^1(0, T; H^{s-2})$. On utilise alors l'estimation a priori (1.14) et on obtient $w = 0$. On a donc l'unicité des solutions dans $\mathcal{C}(0, T; H^s), \forall s$.

On va maintenant chercher des estimations pour le problème dual, afin d'obtenir des résultats d'existence. Comme il a déjà été dit l'opérateur dual est l'opérateur L^* qui vérifie la propriété : $\forall\ u \in H^s([0,T],\mathbf{R}^n), \forall\ v \in H^{-s}([0,T],\mathbf{R}^n)$, tous deux à support compact en t,

$$\langle L_c u, v\rangle_{H^s,H^{-s}} = \langle u, L_c^* v\rangle_{H^s,H^{-s}}.$$

On trouve alors :

$$L^* v = -\partial_t v - \sum_\alpha A^{\alpha T}\partial_\alpha v - \sum_{\alpha,\beta} M^{\beta T} M^\alpha \partial_\alpha\partial_\beta v. \tag{1.15}$$

Les estimations voulues sont donc des estimations en temps décroissant. Pour mieux voir ce qu'on fait, on va considérer un problème $\bar{L}$ dont on donnera des estimations en temps croissant, desquelles on pourra déduire celle sur L^* en temps décroissant.

On pose

$$\bar{L}u = \partial_t u - \sum_\alpha A^{\alpha T}\partial_\alpha u - \sum_{\alpha,\beta} M^{\beta T} M^\alpha \partial_\alpha\partial_\beta u.$$

On a alors si $\forall t \leqslant T,\ v(t) = u(T-t),\ L^* v(t) = \bar{L}u(T-t)$ et par conséquent on a les mêmes égalités sur les normes L^2. Or, en procédant de la même façon que pour l'opérateur L, on montre l'estimation pour $\bar{L}$:

$$\forall t \in [0,T], \quad \|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant C\left(\|u(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \left\|\bar{L}u(\tau)\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}\tau\right).$$

On passe alors aux estimations pour L^* en prenant $v(t) = u(T-t)$:

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 \leqslant C\left(\|v(T)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|L^* v(\tau)\|_{L^2}^2 \mathrm{d}\tau\right).$$

De même on cherche des estimations H^s sur $\bar{L}$ et on en déduit celles pour L^*. Pour cela, on reprend la méthode utilisée pour l'opérateur L et on obtient l'estimation :

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 \leqslant C(s,T)\left(\|u(0)\|_{H^s}^2 + \int_0^T \left\|\bar{L}u(\tau)\right\|_{H^s}^2 \mathrm{d}\tau\right).$$

On passe alors à l'estimation sur v et $L^* v$:

$$\|v(t)\|_{H^s}^2 \leqslant C'(s,T)\left(\|v(T)\|_{H^s}^2 + \int_0^T \|L^* v(\tau)\|_{H^s}^2 \mathrm{d}\tau\right). \tag{1.16}$$

On peut à présent démontrer l'existence d'une solution pour le problème de Cauchy associé à l'opérateur L de la même manière que pour les problèmes hyperboliques. On commence par définir :

$$\mathcal{E} := \{v \in \mathcal{C}^\infty(0,T;H^\infty(\mathbf{R}^n)) : v(.,T) \equiv 0\}.$$

Soit maintenant $v \in \mathcal{E}$, $t \in [0,T]$; l'estimation a priori (1.16) donne :

$$\|v(t)\|^2_{H^s} \leqslant C'(s,T) \int_0^T \|L^* v(\tau)\|^2_{H^s} \,\mathrm{d}\tau. \tag{1.17}$$

Si de plus $L^* v \equiv 0$, on obtient $\forall t, \|v(t)\|_{H^{-s}} = 0$.
On en déduit que L^* est injective sur $\mathcal{E}$ et que l'application F définie par :

$$F : v \to \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle_{H^s,H^{-s}} \mathrm{d}t + \langle a, v(0)\rangle_{H^s,H^{-s}}$$

s'écrit sous la forme $F = \ell \circ L^*$, où ℓ est une forme linéaire sur $L^*\mathcal{E} \subset L^2(0,T;H^{-s})$. Après avoir montré que ℓ était continue pour la norme de $L^2(0,T;H^{-s})$, espace de Hilbert, on prolonge ℓ en une forme linéaire $\tilde{\ell}$ définie sur $L^2(0,T;H^{-s})$ par le théorème de Hahn-Banach. On a alors $\tilde{\ell}$ qui vérifie l'inégalité : $\ell|\tilde{\ell}(\phi)| \leqslant C(a,f)\|\phi\|_{L^2(0,T;H^{-s})}$. Par le théorème de représentation de Riesz, on a l'existence d'un unique $u \in L^2(0,T;H^s)$ tel que :

$$\forall \phi \in L^2(0,T;H^{-s}), \quad \tilde{\ell}(\phi) = \int_0^T \langle u(t), \phi(t)\rangle_{H^s,H^{-s}} \mathrm{d}t.$$

Si on considère maintenant un élément v de $\mathcal{D}(]0,T[\times \mathbf{R}^d) \subset \mathcal{E}$ on obtient :

$$\int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle_{H^s,H^{-s}} \mathrm{d}t = \int_0^T \langle u(t), L^* v(t)\rangle_{H^s,H^{-s}} \mathrm{d}t.$$

On en déduit, par la définition de L^*, que $Lu = f$ au sens des distributions. Si on réécrit cette égalité sous la forme $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -(P+Q)(t)u(t) + f(t)$ où $(P+Q)(t)$ est un opérateur d'ordre 2, on voit que $u \in \mathcal{C}([0,T];H^{s-2})$.
Soit à présent $v \in \mathcal{E}$, à support compact en x. On déduit de la propriété de régularité précédente et d'une intégration par partie qu'on a alors $u(0) \equiv a$ au sens des distributions donc dans H^{s-2}. Finalement u est solution du problème de Cauchy.

La solution ainsi obtenue est donc au moins dans $L^2(H^s) \cap \mathcal{C}^{1/2}(H^{s-2})$. En approchant $a \in H^s$ et $f \in L^2(H^s)$ par des applications respectivement H^∞ et $\mathcal{C}^\infty(H^\infty)$, on peut construire une suite de solutions aux problèmes de Cauchy associés à l'opérateur L. On peut alors montrer que cette suite converge bien vers u, solution du problème de Cauchy associé à a et f, et ainsi, démontrer que $u \in \mathcal{C}(0, T; H^s)$.

On a maintenant démontré l'existence et l'unicité de solution pour le système. Il faut à présent vérifier la compatibilité de la contrainte (1.12) avec le système (1.10). Soit u solution de (1.10) tel que $u(0)$ vérifie la contrainte : $\sum_\alpha M^\alpha \partial_\alpha u(0) = 0$. On reprend la notation $z = \sum_\alpha \partial_\alpha u$. On veut trouver une équation vérifiée par z telle que si $z(0) = 0$ alors $z \equiv 0$. Or, pour une solution u du système (1.1) :

$$
\begin{aligned}
\partial_t z &= \partial_t (\textstyle\sum_\alpha M^\alpha \partial_\alpha u) \\
&= \textstyle\sum_\alpha M^\alpha \partial_\alpha \left(-\sum_\beta \partial_\beta (A^\beta u) + \sum_{\beta,\gamma} M^{\beta T} M^\gamma \partial_\gamma \partial_\beta u + f \right) \\
&= -\textstyle\sum_{\alpha,\beta} \partial_\alpha \partial_\beta (M^\alpha A^\beta u) + \sum_{\alpha,\beta} M^\alpha M^{\beta T} \partial_\alpha \partial_\beta z.
\end{aligned}
$$

Or $\forall \alpha, \beta,\ M^\alpha A^\beta + M^\beta A^\alpha = 0$ donc

$$\partial_t z = \sum_{\alpha,\beta} M^\alpha M^{\beta T} \partial_\alpha \partial_\beta z.$$

On a alors une équation de type chaleur donc le problème de Cauchy est bien posé. On conclut en disant que si $z = 0$ au temps $t = 0$ alors $z \equiv 0$. Ainsi, toute solution du système qui vérifie la contrainte à l'instant initial la vérifie pour tout temps t. □

1.4 Retour sur l'article

Dans le cas de l'article [5], le système linéarisé contraint était :

$$
\begin{aligned}
\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha (f^\alpha(v) + \mathrm{d}f^\alpha(v) \cdot (u - v)) &= 0, && (1.18) \\
u(0) &= v_0, && (1.19) \\
\sum_{\alpha=1}^{d} M^\alpha \partial_\alpha u &= 0, && (1.20)
\end{aligned}
$$

où $x \in \mathbf{R}^d, u(x,t) \in \mathbf{R}^n$, f^α sont des fonctions régulières, et M^α des matrices $m \times n$. On a de plus les relations : $\sum_\alpha M^\alpha \partial_\alpha v = 0$, et $M^\alpha f^\beta + M^\beta f^\alpha \equiv 0, \quad 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant d$.

On remplace ce système qu'on ne sait a priori pas résoudre par le système

$$Lu = f,$$

où L est défini par (1.5) dans lequel on prend $A^\alpha := \mathrm{d}f^\alpha(v)$. On prend aussi $f(x,t) := -\sum_\alpha (f^\alpha(v(x,t)) - \mathrm{d}f^\alpha(v(x,t)) \cdot v(x,t))$. La contrainte considérée ne change pas. Pour pouvoir appliquer le théorème 2, il faut en vérifier les hypothèses, c'est-à-dire montrer que l'on a bien les trois égalités : (1.3)–(1.4) et $M^\alpha \partial_\alpha f(t) = 0$. La première et la troisième se trouvent en différentiant l'égalité $M^\alpha f^\beta + M^\beta f^\alpha \equiv 0$.

Pour obtenir la deuxième relation il faut reprendre le système non-linéaire. Dans celui-ci, on a un système de loi de conservation :

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha f^\alpha(u) = 0, \tag{1.21}$$

contraint par un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants (1.20) :

$$\sum_\alpha M^\alpha \partial_\alpha u = 0.$$

Le système contraint est compatible avec une loi entropique supplémentaire, mais sansla contrainte (1.21) est compatible avec la loi :

$$\partial_t \eta(u) + \sum_\alpha q^\alpha(u) = Z(u) \cdot \sum_\alpha M^\alpha \partial_\alpha u, \tag{1.22}$$

où $\mathrm{D}^2\phi > 0$.
On en déduit la relation $\mathrm{d}q^\alpha = \mathrm{d}\eta \mathrm{d}f^\alpha + Z \cdot M^\alpha$, que l'on différentie pour obtenir

$$\mathrm{D}^2 q^\alpha = \mathrm{D}^2\eta \mathrm{d}f^\alpha + \mathrm{d}\eta \mathrm{D}^2 f^\alpha + \mathrm{d}Z \cdot M^\alpha.$$

Or, dans cette égalité, on a $\mathrm{D}^2 q^\alpha$ et $\mathrm{D}^2 f^\alpha$ qui sont symétriques. On pose alors $N := \mathrm{d}Z$ et $S^\alpha = \mathrm{D}^2 q^\alpha - \mathrm{d}\eta \mathrm{D}^2 f^\alpha$. Dans le cas où $\eta = 1/2|u|^2$, on obtient $\mathrm{D}^2\eta = I$ et par conséquent,

$$A^\alpha = S^\alpha - N M^\alpha.$$

Maintenant que les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées, on peut l'appliquer et on a alors une solution au système (1.10)–(1.11)–(1.12). Compte tenu des définitions de A^α et de f, on a en fait trouvé une solution pour le système de l'article (1.18)–(1.19)–(1.20).

Cette modification du système linéarisé dans l'article ne pose pas de problème dans la suite compte tenu du fait qu'on a finalement réussi à démontrer l'existence de solutions pour un problème qui apparemment n'est pas symétrisable, mais qui est bien celui proposé dans l'article.

Chapitre 2

Extension d'un système de loi de conservation

Les notations dans les parties 2 et 3 sont totalement indépendantes de celles utilisées dans la partie 1.

2.1 Question de recherche

On considère un système

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbf{R}, u(x,t) \in \mathbf{R}^n$ et $f(u) \in \mathbf{R}^n$. On demande que ce système soit compatible avec une loi entropie-flux supplémentaire :

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) = 0, \tag{2.2}$$

avec η non strictement convexe, $\eta(u) \in \mathbf{R}, q(u) \in \mathbf{R}$. Et on suppose de plus qu'il existe P tel que si u vérifie le premier système, alors u vérifie aussi :

$$\partial_t P(u) + \partial_x Q(u) = 0, \tag{2.3}$$

où $P(u) \in \mathbf{R}^p$ et $Q(u) \in \mathbf{R}^p$, et qu'il existe ϕ tel que : $\eta(u) = \phi(u, P(u))$ et $\mathrm{D}^2\phi > 0$.

Le but est alors d'élargir le premier système en un nouveau système de la forme :

$$\partial_t v + \partial_x g(v) = 0, \tag{2.4}$$

dans lequel $v(x,t) \in \mathbf{R}^{n+p}, g(v) \in \mathbf{R}^{n+p}$, compatible avec un couple entropie-flux entropique (ϕ, F) et tel que si on écrit $v = \begin{pmatrix} u \\ P \end{pmatrix}$, on a

$$g\begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \\ Q(u) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$F\begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix} = q(u). \tag{2.6}$$

De plus, on demandera qu'une solution du système étendu (2.4) telle que $v_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ P(u_0) \end{pmatrix}$ nous donne une solution du système initial (2.1), c'est-à-dire vérifie $v(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ P(u(t)) \end{pmatrix}$.

2.2 Motivations

Dans l'article [5], Denis Serre étend le système des équations de Maxwell, qui est un système de loi de conservation muni d'une entropie non-convexe à 6 inconnues, en un système de loi de conservation à 9 inconnues afin de démontrer l'existence de solutions pour le premier. L'idée était donc de généraliser cette méthode d'extension. La principale et non négligeable différence entre le cas général qui a été traité ici et le cas de l'article est la présence de contrainte. Mais, commençons par comprendre exactement comment le système a pu être étendu.

Le modèle étudié est celui de Coleman et Dill, dont le système initial est

$$\partial_t B + \mathrm{rot} E = 0,$$
$$\partial_t D - \mathrm{rot} H = 0,$$

dans lequel la variable d'espace est dans $\mathbf{R}^3$, $B(x,t), D(x,t)$ sont dans $\mathbf{R}^3$ également, et E et H sont des fonctions vectorielles régulières. De plus, ce système est compatible avec les contraintes :

$$\mathrm{div} B = \mathrm{div} D = 0.$$

L'entropie est la fonction régulière W qui vérifie

$$\partial_t W + \mathrm{div}(E \wedge H) = 0,$$

ainsi que les relations :

$$E = \partial_D W, \quad H = \partial_B W.$$

Et, enfin, dans le cas du modèle Born-Infeld

$$W(B,D) = \sqrt{(1 + \|B\|^2 + \|D\|^2 + \|B \wedge D\|^2)}.$$

remarque Dans ce cas, l'entropie W est en effet non-convexe et, par conséquent, on a aucun résultat a priori sur l'existence et l'unicité pour le problème de Cauchy dans le cas des équations de Maxwell. Un élargissement du système est donc nécessaire.

En écrivant alors $P = B \wedge D$, on a P qui vérifie :

$$\partial_t P_i + \mathrm{div}(E_i D + H_i B) + \partial_i(W - E \cdot D - H \cdot B) = 0,$$

et $\phi(B, D, P) = \sqrt{(1 + \|B\|^2 + \|D\|^2 + \|P\|^2)}$ qui est strictement convexe.

Pour obtenir l'expression du système étendu, il a fallu traduire ce que voulait dire $\partial_D W$ en fonction de ϕ et faire de même pour $\partial_B W$. Ainsi on a obtenu E et H et il restait à exprimer T en utilisant les expressions de E et H, sachant que T est la fonction intervenant dans le système élargi :

$$\begin{array}{ll} \partial_t B + \mathrm{rot}\, E = 0, & \mathrm{div} B = 0, \\ \partial_t D - \mathrm{rot}\, H = 0, & \mathrm{div} D = 0, \\ \partial_t P + \mathrm{Div}\, T = 0. & \end{array}$$

Ce système est bien un système de loi de conservation compatible avec une loi pas tout à fait entropique car faisant intervenir les contraintes :

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(B, D, P) + \mathrm{div}(E \wedge H) = \mathrm{div}(((P - B \wedge D) \cdot \partial_P \phi)\partial_P \phi) \\ - \partial_P \phi \cdot ((\mathrm{div} B)H - (\mathrm{div} D)E). \end{aligned}$$

Dans le cas des équations de Maxwell, il y a donc eu extension d'un système contraint ce qui a simplifié un certain nombre d'équations mais cet élargissement n'est pas vrai en l'absence des contraintes vu que dans ce dernier cas P ne vérifie plus d'équation de conservation.

D'autres élargissements de systèmes ont également été étudié, également dans le cadre de la thermodynamique par Brenier [2] mais aussi pour les systèmes relatifs à l'élasticité dans [3] et [4].

2.3 Premier essai d'élargissement du système

On définit $\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ P \end{pmatrix} : u \in \mathbf{R}^n, \text{ et } P = P(u) \right\}$. On cherche deux fonctions g et F tels que leurs restrictions à Σ soient déjà connues. Leurs expressions sur Γ sont données par les relations (2.5)–(2.6). De plus, pour assurer la compatibilité avec la loi entropique

$$\partial_t \phi(v) + \partial_x F(v) = 0, \tag{2.7}$$

il est nécessaire d'exiger la condition sur les deux fonctions :

$$\forall v \in \mathbf{R}^{n+p}, \quad \mathrm{d}F(v) = \mathrm{d}\phi(v) \cdot \mathrm{d}g(v). \tag{2.8}$$

Il faut donc étendre simultanément deux fonctions interdépendantes. On va essayer de trouver une méthode pour contourner cette difficulté.

2.4 Utilisation de la symétrisation du système étendu

L'idée, à présent, est d'étendre une unique fonction au lieu de plusieurs. Or, le problème étendu doit être une loi de conservation (2.4) compatible avec une loi entropique supplémentaire strictement convexe (2.7). Par conséquent, il doit être symétrisable et on peut utiliser sa symétrisation comme cela est fait dans [3].

Supposons donc que le système étendu existe et procédons à sa symétrisation. Pour cela, on définit tout d'abord $\phi^*(z) = \sup_z(v \cdot z - \phi(v))$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_z\phi^*(\mathrm{d}_v\phi(v)) &= v & (2.9)\\ (\mathrm{D}_v^2\phi(v))^{-1} &= \mathrm{D}_z^2\phi^*(\mathrm{d}_v\phi(v)). & (2.10) \end{aligned}$$

On procède alors au changement de variables $v = \mathrm{d}_z\phi^*(z)$ dans le système (2.4) et on établit ainsi le nouveau système :

$$\partial_t z + \mathrm{D}_v^2\phi(\mathrm{d}_z\phi^*(z))\partial_x g(\mathrm{d}_z\phi^*(z)) = 0. \tag{2.11}$$

On montre ensuite que ce système est symétrisable en établissant que $g^* = g \circ \mathrm{d}_z\phi^*$ est en fait une différentielle. La fonction M définie ci-dessous vérifie effectivement la relation $\mathrm{d}M(z) = g^*(z)$:

$$M(z) := z \cdot g^*(z) - F^*(z), \tag{2.12}$$

où $F^* = F \circ \mathrm{d}_z\phi^*$.

A partir de là, on obtient des conditions nécessaires sur M, ainsi que sur sa différentielle, pour que le système (2.4) soit effectivement un élargissement du système (2.1). En effet celles-ci sont définies sur la sous-variété $\Sigma^* := \mathrm{d}_v\phi(\Sigma)$ de $\mathbf{R}^{n+p}$ par

$$\begin{aligned} M\left(\mathrm{d}_v\phi\begin{pmatrix} u \\ P(u)\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{d}_v\phi\begin{pmatrix} u \\ P(u)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(u) \\ Q(u)\end{pmatrix} - q(u), & (2.13)\\ \mathrm{d}M\left(\mathrm{d}_v\phi\begin{pmatrix} u \\ P(u)\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} f(u) \\ Q(u)\end{pmatrix}, & (2.14) \end{aligned}$$

relations établies grâce à (2.12) associé à (2.5)–(2.6) d'une part et à $\mathrm{d}M(z) = g^*(z)$ associé à (2.5) d'autre part.

2.5 Mise en place du système élargi

Repartons à présent du système initial (2.1) et essayons de définir une fonction M vérifiant toutes les conditions nécessaires définies précédemment. Cela revient à prolonger une fonction à valeurs réelles définie sur une variété Σ^* de $\mathbf{R}^{n+p}$, sachant qu'on connait de plus sa différentielle sur cette même variété. Il est possible d'étendre M sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^{n+p}$, voisinage de Σ^*. Mais on ne connait pas Σ^* autrement que comme image d'un graphe. Rien ne nous assure donc qu'on pourra étendre M à tout $\mathbf{R}^{n+p}$ avec une multiplication par d'une fonction C^∞ à support compact (inclus dans $\mathcal{O}$) et valant 1 sur Σ^*. En effet de telles fonctions n'existent peut-être pas et c'est en particulier le cas si $\overline{\Sigma^*} \not\subset \mathcal{O}$, car une telle fonction vaudrait à la fois 1 et 0 sur $\mathbf{R}^{n+p}\backslash(\overline{\Sigma^*} \cap \mathcal{O})$. Il va donc falloir essayer de revenir à Σ tout en gardant une seule fonction à étendre.

2.6 Retour à la variété Σ

On a maintenant une fonction connue sur $\Sigma^* = \mathrm{d}_v\phi(\Sigma)$ et on sait de plus que $\mathrm{d}_v\phi$ est un difféomorphisme sur son image d'inverse $\mathrm{d}_z\phi^*$. On peut donc définir une fonction sur Σ à partir de M. On pose :

$$N(v) := M(\mathrm{d}_v\phi(v)), \tag{2.15}$$

et on essaye de traduire les conditions sur M en des relations sur N. On peut déjà calculer la différentielle de N :

$$\mathrm{d}N(v) = \mathrm{D}_v^2\phi(v)(\mathrm{d}M_z(\mathrm{d}_v\phi(v)), \cdot). \tag{2.16}$$

On pose :

$$N_1(u) := \mathrm{d}_v\phi\begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(u) \\ Q(u) \end{pmatrix} - q(u), \tag{2.17}$$

$$N_2(u) := \mathrm{D}_v^2\phi\begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(u) \\ Q(u) \end{pmatrix}, \cdot\Bigg). \tag{2.18}$$

En combinant les relations (2.15)–(2.16) avec (2.13)–(2.14), on obtient :

$$\forall u \in \mathbf{R}^n, \quad N\begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix} = N_1(u), \quad \mathrm{d}N\begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix} = N_2(u). \tag{2.19}$$

Nous allons donc maintenant étendre la fonction N à $\mathbf{R}^{n+p}$, la connaissant sur le graphe Σ de l'application P, et connaissant également sa différentielle sur cette même variété. Mais, avant de faire un prolongement il faut vérifier que ces conditions sont effectivement compatibles entre elles, c'est-à-dire que $\mathrm{d}N_1$ et N_2 vérifient la relation qui va suivre. On doit avoir :

$$\mathrm{d}N_1(u) = N_2(u) \cdot \begin{pmatrix} I \\ \mathrm{d}P(u) \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathrm{d}N_1(u) &= \mathrm{D}_v^2\phi \begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} f(u) \\ Q(u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I \\ \mathrm{d}P(u) \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + \mathrm{d}_v\phi \begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}f(u) \\ \mathrm{d}Q(u) \end{pmatrix} - \mathrm{d}q(u). \end{aligned}$$

Mais, d'autre part $\mathrm{d}Q(u) = \mathrm{d}P(u)\mathrm{d}f(u)$ et $\mathrm{d}q(u) = \mathrm{d}\eta(u)\mathrm{d}f(u)$ car (2.2) et (2.3) sont compatibles avec (2.1), et $\mathrm{d}\eta(u) = \mathrm{d}_v\phi \begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ \mathrm{d}P(u) \end{pmatrix}$ d'après la relation connue entre ϕ et η. De toutes ces égalités, on déduit la relation recherchée entre $\mathrm{d}N_1$ et N_2, (2.20).

Les conditions sur N sont donc compatibles entre elles, on peut alors prolonger cette fonction. Le prolongement fait sera au plus simple, c'est-à-dire affine en P. On pose :

$$N \begin{pmatrix} u \\ P \end{pmatrix} := N_1(u) + N_2(u) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ P - P(u) \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Cette fonction vérifie bien $N \begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix} = N_1(u)$ d'une part et par ailleurs le calcul de $\mathrm{d}N \begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix}$ combiné avec la relation (2.20) donne effectivement $\mathrm{d}N \begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix} = N_2(u)$.

On a donc réussi à prolonger N en une fonction définie sur $\mathbf{R}^{n+p}$. Il faut maintenant utiliser ce prolongement pour définir ceux de g et de F, applications intervenant dans le système (2.4) et la loi d'entropie (2.7).

2.7 Prolongements de g et F

Par la définition de M (2.12) on avait une relation entre M, g^* et F^*. On peut en déduire d'autres relations entre N, g et F. En effet $\mathrm{d}M(z) = g^*(z)$ et $M(z) := z \cdot g^*(z) - F^*(z)$ deviennent :

$$\begin{aligned} g(v) &= \mathrm{D}_z^2\phi^*(\mathrm{d}_v\phi(v))\mathrm{d}N(v), && (2.22) \\ F(v) &= \mathrm{d}_v\phi(v) \cdot g(v) - N(v), && (2.23) \end{aligned}$$

par les relations (2.15)–(2.16).

Nous avons alors des définitions pour F et g et il est aisé de vérifier qu'on a bien les égalités (2.5)–(2.6). Il faut maintenant vérifier que le système étendu (2.4) est bien compatible avec la loi entropique associée au couple (ϕ, F), ce qui revient à (2.8) : $\forall v \in \mathbf{R}^{n+p}, \quad \mathrm{d}F(v) = \mathrm{d}\phi(v) \cdot \mathrm{d}g(v)$, égalité qui se démontre aisément avec les relations (2.22)–(2.23).

Ainsi, il a été possible d'élargir le système initial muni d'une entropie non-convexe en un nouveau système qui cette fois est compatible avec une entropie convexe, ce qui va nous permettre de prouver l'existence de solutions pour ce système.

Chapitre 3

Obtention d'une solution pour le système initial

Nous avons montré dans la partie précédente que le système (2.1) compatible avec la loi d'entropie supplémentaire (2.2) ainsi qu'avec une autre loi de conservation (2.3) pouvait être élargi en un nouveau système (2.4) lui aussi compatible avec une loi entropique (2.7). Pour faire cela, il suffisait d'avoir l'hypothèse supplémentaire $\eta(u) = \phi(u, P(u))$ avec ϕ strictement convexe où u etP, et, η et ϕ sont respectivement les inconnues et fonctions intervenant dans les équations précédemment citées.

De plus, on sait démontrer que le système élargi admet une solution. Et on aimerait pouvoir en conclure l'existence de solutions pour le système initial.

3.1 Existence et unicité de solution pour le système étendu

Le système (2.4) est un système de loi de conservation qui est compatible avec la loi de conservation supplémentaire (2.7). On réécrit ce système :

$$\partial_t v + \partial_x g(v) = 0, \tag{3.1}$$

$$\partial_t \phi(v) + \partial_x F(v) = 0. \tag{3.2}$$

On sait de plus que ϕ est strictement convexe. Le système est donc symétrisable comme il a été vu dans la section 2.4, et on peut utiliser le théorème suivant que l'on trouve dans le livre de Dafermos [3] :

Théorème 3. *On suppose que le système de loi de conservation $\partial_t w + \sum \partial_\alpha h^\alpha(w) = 0$ est compatible avec une entropie ϕ telle que $\mathrm{D}^2\phi(v)$ soit définie positive, uniformément sur tout compact. On suppose de plus que la*

donnée initiale w_0 est continuement différentiable sur $\mathbf{R}^m$ et à valeurs dans un compact et que $\mathrm{d}w_0 \in H^s$ avec $s > m/2$.
Alors il existe T_∞, $0 < T_\infty \leqslant \infty$, et une unique fonction w continuement différentiable sur $\mathbf{R} \times [0, T_\infty[$, qui soit solution classique du problème de Cauchy sur $[0, T_\infty[$.

Ainsi, on obtient l'existence et l'unicité de solution classique pour le système élargi sur un intervalle $[0, T[$. Reste à voir quels résultats cela implique pour le système initial, tant au niveau de l'existence qu'au niveau de l'unicité.

3.2 Retour au système initial

3.2.1 Unicité

On peut démontrer le théorème d'unicité suivant :

Théorème 4. *Soit un système de loi de conservation (2.1) compatible avec deux autres lois supplémentaires (2.2) et (2.3) régissant les conservations respectives de η et de P. On suppose de plus qu'il existe une fonction ϕ telle que $\mathrm{D}^2\phi > 0$ et qu'on ait l'égalité : $\forall u \in \mathbf{R}^n, \eta(u) = \phi(u, P(u))$. Soit de plus u_0 une application continuement différentiable sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans un compact et telle que $\mathrm{d}u_0 \in H^s$ avec $s > 1/2$.*

On suppose maintenant qu'il existe $T \in (0, \infty]$ ainsi que u et $\bar{u}$ des fonctions continuement différentiables sur $\mathbf{R} \times [0, T[$, solutions classiques au problème (2.1) avec comme donnée initiale u_0.

Alors $u = \bar{u}$.

Démonstration. En effet, si on a plusieurs solutions classiques $u, \bar{u}$, au système (2.1) avec la même donnée initiale u_0, alors $\begin{pmatrix} u \\ P(u) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \bar{u} \\ P(\bar{u}) \end{pmatrix}$ sont solutions classiques du système élargi (2.4) avec pour même donnée initiale $\begin{pmatrix} u_0 \\ P(u_0) \end{pmatrix}$. Alors, l'unicité pour le système élargi nous donne l'égalité $u = \bar{u}$ et donc l'unicité pour le problème initial. □

3.2.2 Existence ?

Comme nous allons le voir, l'existence est moins évidente à établir que l'unicité à partir du théorème connu pour le système élargi.

Soit v_0 une donnée initiale vérifiant les hypothèses exigées dans le théorème 3. Soit alors v l'unique solution classique au problème de Cauchy associé à (2.4). Pour obtenir l'existence de solution classique dans le cas du problème de Cauchy associé au système initial (2.1), il faudrait arriver à montrer que si v_0 est de la forme $\begin{pmatrix} u_0 \\ P(u_0) \end{pmatrix}$, alors $\forall t \in [0,T[,\ v(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ P(u(t)) \end{pmatrix}$.

Afin d'essayer de montrer cela, on pose $\forall t,\ \delta(t) := P(t) - P(u(t))$, avec $v(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ P(t) \end{pmatrix}$ et on essaye de trouver un système d'EDP linéaire vérifié par δ. Si dans le cas d'une donnée initiale nulle, 0 est bien solution du problème de Cauchy associé à δ et que de plus on arrive à démontrer que la solution est unique, alors on aura démontré le résultat espéré.

Mais, avant tout, essayons de trouver un système d'EDP vérifié par δ. On a $v = \begin{pmatrix} u \\ P \end{pmatrix}$ qui est solution classique de (2.4) donc qui vérifie

$$\partial_t v + C(v)\partial_x v = 0, \tag{3.3}$$

relation dans laquelle on a pris $C(v) := \mathrm{d}_v g(v)$ et on note

$$C = \begin{pmatrix} C_{uu} & C_{up} \\ C_{pu} & C_{pp} \end{pmatrix}.$$

Cela revient à réécrire (3.3) sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_t u + C_{uu}\partial_x u + C_{up}\partial_x P &= 0, & (3.4)\\ \partial_t P + C_{pu}\partial_x u + C_{pp}\partial_x P &= 0. & (3.5) \end{aligned}$$

Et on en déduit une équation sur δ :

$$\begin{aligned} \partial_t \delta &= -\mathrm{d}P\partial_t u + \partial_t P \\ &= (\mathrm{d}PC_{up} - C_{pp})\partial_x \delta + \{(\mathrm{d}PC_{up} - C_{pp})\mathrm{d}P + \mathrm{d}PC_{uu} - C_{pu}\}\partial_x u. \end{aligned}$$

Pour que 0 soit solution de système, il faut que $(\mathrm{d}PC_{up} - C_{pp})\mathrm{d}P + \mathrm{d}PC_{uu} - C_{pu}$ soit nul sur Σ. Or, l'égalité (2.5) donne

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}f(u) \\ \mathrm{d}Q(u) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} I \\ \mathrm{d}P \end{pmatrix}$$

d'une part ; et d'autre part $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}P\mathrm{d}f$, et enfin $(\mathrm{d}PC_{up} - C_{pp})\mathrm{d}P + \mathrm{d}PC_{uu} - C_{pu} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}P & -I \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} I \\ \mathrm{d}P \end{pmatrix}$. De toutes ces égalités on déduit qu'on a effectivement

$$\mathrm{d}PC_{up}\mathrm{d}P - C_{pp}\mathrm{d}P + \mathrm{d}PC_{uu} - C_{pu} \equiv 0 \text{ sur } \Sigma. \tag{3.6}$$

On factorise alors par δ le terme en $\partial_x u$ du système obtenu pour δ et on obtient finalement un système de la forme :

$$\partial_t \delta + \mathcal{A}\partial_x \delta = \mathcal{B}\delta, \tag{3.7}$$

dans lequel $\mathcal{A} = C_{pp} - \mathrm{d}PC_{up}$.

Le problème est maintenant de montrer l'unicité des solutions pour le problème de Cauchy lié au système (3.7), ce qui revient à montrer l'unicité pour le problème de Cauchy relatif au système sans second membre :

$$\partial_t \delta + \mathcal{A}\partial_x \delta = 0. \tag{3.8}$$

Le problème est que l'on a a priori presque pas d'informations sur la matrice $\mathcal{A}$, il faut donc essayer de lui trouver des propriétés à partir de celles connues pour C. En effet, on peut utiliser le fait que l'opérateur $\partial_t + C\partial_x$ est symétrisable, et pour être plus précis que $\mathrm{D}^2\phi C$ est symétrique.

Une première idée pour utiliser les propiétés de C est d'étudier ce qu'il se passe sur la variété Σ, d'en déduire des propriétés pour $\mathcal{A}$ puis d'essayer de les étendre dans un voisinage de la variété. L'égalité précédemment démontrée,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}P & -I \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} I \\ \mathrm{d}P \end{pmatrix} = 0,$$

nous permet de trigonaliser C sur Σ :

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathrm{d}P & -I \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathrm{d}P & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}f & -C_{up} \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix}.$$

On a alors que si C est à valeurs propres réelles et simples sur Σ, il en va de même de $\mathcal{A}$, et donc $\partial_t + \mathcal{A}\partial_x$ est strictement hyperbolique dans un voisinage de la variété Σ. Comme on a qu'une seule dimension d'espace, la stricte hyperbolicité implique la symétrisabilité de l'opérateur. Et alors on obtient l'unicité pour le problème de Cauchy associé à (3.8). Mais, en même temps, le cas où C est à valeurs propres réelles et simples sur Σ est d'un intérêt limité compte tenu du fait que dans ce cas, $\mathrm{d}f$ est également à valeurs propres réelles et simples et donc que l'opérateur $L_u = \partial_t + \mathrm{d}f(u)\partial_x$ est strictement hyperbolique et alors on conclut directement quant à l'existence et à l'unicité pour le problème de Cauchy lié à L_u. Dans ce cas, l'élargissement du système semble être inutile.

Le problème est que si C n'est pas à valeurs propres réelles et simples, on ne sait pas déduire de propriété sur $\mathcal{A}$ extensible à un voisinage de la variété Σ ; en particulier, dans le cas de valeurs propres multiples pour C, $\mathcal{A}$ peut également avoir des valeurs propres multiples sur Σ et rien ne nous assure que les multiplicités restent constantes en dehors de la variété.

Compte tenu du fait que les propriétés pour C sur Σ ne donnent pas vraiment de résultat pour $\mathcal{A}$ extensible en dehors de la variété Σ, on va essayer d'utiliser la symétrisation de C ou plus exactement le fait que $\mathrm{D}^2\phi C$ est symétrique avec $\mathrm{D}^2\phi$ définie positive. On écrit $\mathrm{D}^2\phi$ sous la forme :

$$\mathrm{D}^2\phi = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{uu}\phi & \mathrm{d}_{up}\phi \\ \mathrm{d}_{pu}\phi & \mathrm{d}_{pp}\phi \end{pmatrix}.$$

Le calcul donne alors :

$$\mathrm{D}^2\phi C = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{uu}\phi C_{uu} + \mathrm{d}_{up}\phi C_{pu} & \mathrm{d}_{uu}\phi C_{up} + \mathrm{d}_{up}\phi C_{pp} \\ \mathrm{d}_{pu}\phi C_{uu} + \mathrm{d}_{pp}\phi C_{pu} & \mathrm{d}_{pu}\phi C_{up} + \mathrm{d}_{pp}\phi C_{pp} \end{pmatrix}.$$

En utilisant la relation $\mathcal{A} := C_{pp} - \mathrm{d}PC_{up}$ qui est en fait la définition de $\mathcal{A}$ on obtient que la matrice $p \times p$ suivante est symétrique :

$$(\mathrm{d}_{pu}\phi + \mathrm{d}_{pp}\phi\mathrm{d}P)C_{up} + \mathrm{d}_{pp}\phi\mathcal{A}.$$

Si on avait $(\mathrm{d}_{pu}\phi + \mathrm{d}_{pp}\phi\mathrm{d}P)C_{up}$ symétrique, ce serait également le cas pour $\mathcal{A}$. De plus cette propriété serait vérifiée partout, et non seulement si v est sur la variété. Et alors, $\mathrm{d}_{pp}\phi$ étant définie positive, en tant que restriction de $\mathrm{D}^2\phi$, on aurait $\partial_t + \mathcal{A}\partial_x$ symétrisable, et par conséquent l'unicité pour le problème de Cauchy associé à cet opérateur. Ceci étant, il ne semble pas évident que $(\mathrm{d}_{pu}\phi + \mathrm{d}_{pp}\phi\mathrm{d}P)C_{up}$ soit symétrique.

Ceci dépend certainement de la fonction ϕ ainsi que de l'élargissement fait pour le système donc de g car ϕ et g ne sont a priori pas uniques. En effet, ce n'est pas parce qu'il y a unicité pour (3.8) pour un certain couple (ϕ, g) convenable, qu'il y a unicité pour tout couple permettant l'élargissement. Il faudrait donc trouver une condition supplémentaire dans le prolongement de g, ce qui revient à trouver une condition supplémentaire dans le prolongement de N. La relation (2.22) donne

$$C_{up}(v) = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}_p(\mathrm{D}^2{}_z\phi^*(\mathrm{d}_v\phi(v))\mathrm{d}N(v)),$$

égalité que je n'ai su exploiter pour trouver des conditions supplémentaires.

Nous n'avons pas pu conclure pour l'instant sur l'existence de solution pour le problème initial (2.1) mais nous avons tout de même un résultat d'unicité avec le théorème 4.

Conclusion

Ainsi, on a démontré qu'un problème de Cauchy était bien posé : celui relatif à un certain type de système linéaire contraint. D'autre part, en dimension d'espace 1, on a réussi à élargir un système de loi de conservation muni d'une entropie non-convexe (η) et d'une loi de conservation supplémentaire (pour la quantité P) en un système de loi de conservation muni d'une entropie strictement convexe, à la seule condition que ϕ strictement convexe existe tel que $\eta(u) = \phi(u, P(u))$. Par ce biais, il a été possible de démontrer l'unicité pour le problème de Cauchy du premier système. Par contre la démonstration de l'existence n'a pas aboutit pour l'instant. Le problème est peut-être sur le choix dans le prolongement des applications. En effet, on a vu qu'une possibilité pour démontrer l'existence à partir du système élargi était de démontrer un théorème d'unicité pour un autre système qui dépend des applications prolongées.

Ceci étant, ce travail ouvre également d'autres perspectives. D'une part, l'étude est faite ici en dimension d'espace égale à 1 mais la partie 2 s'adapte sans difficulté au cas de dimension supérieure. En effet, cela revient à prolonger plusieurs application N^α au lieu d'une seule, mais celles-ci sont indépendantes les unes des autres. On en déduit la démonstration d'un théorème d'unicité mais, comme dans le cas de la dimension 1, on a pas pour l'instant de théorème d'existence. Mais si on arrive à en montrer un dans le cas de la dimension 1 en imposant des conditions supplémentaires pour le prolongement, il y a de grandes chances que celui-ci s'adapte au cas plus général.

Par ailleurs, on a vu que les systèmes qui avaient été élargis auparavant étaient des systèmes contraints et il vrai que c'est le cas de beaucoup de systèmes dérivés de la physique. Il serait donc intéressant de voir si il est possible de procéder à un élargissement d'un système contraint, sachant que les hypothèses à considérer seront certainement un peu plus complexes.

Remerciements Je remercie ici mon maître de stage, Denis Serre, d'avoir accepté de m'accueillir et de m'avoir encadré dans mon travail et permis de me familiariser avec un monde que je connaissais encore mal : celui de la recherche.

Références

[1] Benzoni-Gavage, S., and Serre, D. *First-order hyperbolic systems of partial differential equations. With applications.* In preparation.

[2] Brenier, Y. Hydrodynamic structure of the augmented Born-Infeld equations. *Arch. Ration. Mech. Anal. 172*, 1 (2004), 65–91.

[3] Dafermos, C. M. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[4] Demoulini, S., Stuart, D. M. A., and Tzavaras, A. E. A variational approximation scheme for three-dimensional elastodynamics with polyconvex energy. *Arch. Ration. Mech. Anal. 157*, 4 (2001), 325–344.

[5] Serre, D. Hyperbolicity of the nonlinear models of Maxwell's equations. *Arch. Ration. Mech. Anal. 172*, 3 (2004), 309–331.