(M^{2m}, ω) symplectique (compacte : pour que les intégrales existent).

$T \simeq \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{m} \curvearrowright^{\text{Hamiltonienne}} M$

$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{t}^* = (\mathrm{Lie}\, T)^*$ (application moment)

$a \in \mathfrak{t} \rightsquigarrow X_a \in \Gamma(TM)$.

$d\langle \mu, a\rangle = + \omega(X_a, -)$.

pour suivre la réf. McDuff-Salamon (en général un -1)

$\omega + t\mu \in \Omega^*_T(M)$ est une forme équivariante fermée.

$\Omega^*_T(M) = \Omega^*(M) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$

Pour $\alpha \in \Omega^*_T(M)$, $d_{\mathfrak{t}}\alpha = d\alpha_a + \iota_{X_a}\alpha_a$, $\forall a \in \mathfrak{t}$.

Formule de localisation :

M var. compacte, $T \curvearrowright^{\text{lisse}} M$ et $\alpha \in \Omega^*_T(M)$, $d_{\mathfrak{t}}$ fermée.

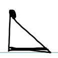
Alors $(\star)$ $\displaystyle\int_M \alpha_a = \sum_{Z_k} (-1)^{\frac{\operatorname{codim} Z_k}{2}} \int_{Z_k} \frac{\iota^*_{Z_k}\alpha}{\chi(E^{Z_k})(a)}$, E^{Z_k} = fibré normal équivariant de Z_k dans M.

$\chi(E^{Z_k})(a)$: classe d'Euler équivariante

$F = \mathrm{Fix}_T M = \bigsqcup_k Z_k$; T fixe Z_k, $T \curvearrowright E^{Z_k}$, $E^{Z_k} = \bigoplus_{i=1}^{m_k} E_i^{Z_k}$, avec poids : $w_i^{Z_k} \in \mathfrak{t}^* : a \overset{e^{\mathfrak{t}}}{\rightsquigarrow} e^{-2\pi i \langle w_i^{Z_k}, a\rangle}$.

Ex. : $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{C}$

$S^1 \curvearrowright \mathbb{CP}^2$, $T^2 \curvearrowright \mathbb{CP}^2$.

$\mathrm{Im}\, \mu =$  $\uparrow e$ $[z_0 : z_1 : z_2]$, $\mu([z]) = \left(\frac{|z_0|^2}{\sum |z_i|^2}, \frac{|z_1|^2}{\sum |z_i|^2} \right)$.

$\chi(E^{Z_k})(a) = \prod_{i=1}^{m_k} \left(2\pi c_1(E_i^{Z_k}) - \langle w_i^{Z_k}, a\rangle\right)$, où $m_k = \frac{\operatorname{codim} Z_k}{2}$

Rem. 1 : $Z_k = \{z\}$: $\chi(E^{Z_k})(a) = \prod_{i=1}^{m_k} \langle w_i^{Z_k}, a\rangle$.

Rem. 2 : $a \in \mathfrak{t}^*$ générique, zéro $X_a = F$.

Rem. 3 : il suffit de le montrer pour des actions de S^1.

Duistermaat-Heckman ont démontré $(\star)$ pour $\alpha_a = e^{\omega + t\langle \mu, a\rangle}$.

[McDuff - Salomon : cas où $T = S^1$, $F = \bigcup_k \{z_k\}$ points fixes isolés]

DH : localisation $H \overset{=\langle\mu,a\rangle}{:} M \to \mathbb{R}$, $\hbar \in \mathbb{C}$.

$$\int_M e^{-\hbar H} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_p \frac{e^{-\hbar H(p)}}{\hbar^n \chi(p)}$$

$d_\hbar = d + \hbar\iota_X$, où X générateur de l'action de S^1.

Lemme 1 : soit $\tau \in \Omega^*_{S^1}(M)$, $\tau = \tau_{2n} + \hbar\tau_{2n-2} + \dots + \hbar^n\tau_0$ une forme $d_\hbar$-fermée tq τ_0 s'annule sur F alors τ est $d_\hbar$-exacte et $\int_M \tau_{2n} = 0$.

Pour généraliser au cas $F \neq$ point isolé, $\iota^*_{z_k}\tau = 0$.

$d_\hbar \tau = 0$.

$$d_\hbar\tau = \sum_{i=0}^n \hbar^i d\tau_{2n-2i} + \hbar^{i+1}\iota_X\tau_{2n-2i} = \underset{0}{\cancel{d\tau_{2n}}} + \hbar^{n+1}\underset{0}{\cancel{\iota_X\tau_0}} + \sum_{i=1}^n \hbar^i\big(\underbrace{d\tau_{2n-2i} + \iota_X\tau_{2n+2-2i}}_{=0}\big).$$

On peut construire une primitive sur $M\setminus F$.

$\alpha \in \Omega^1(M\setminus F)$ tq $\alpha(X) = 1$, $d\alpha(X,\cdot) \equiv 0$.

$$\mathcal{L}_X\alpha = 0$$

$\sigma_1 := \tau_0\alpha$, $\sigma_3 := \tau_2\wedge\alpha - \sigma_1\wedge d\alpha$, $d\sigma_1 + \iota_X\sigma_3 = \tau_2$.

$\sigma_{2k+1} := \tau_{2k}\wedge\alpha - \sigma_{2k-1}\wedge d\alpha$, $\tau_{2k} = d\sigma_{k-1} + \iota_X\sigma_{2k+1}$.

$\Rightarrow \tau_{2n} = d\sigma_{n-1}$.

Soit $\phi : M \to M$ isotope à l'identité équivariante qui envoie un voisinage des points fixes sur le point fixe.

Alors $\phi^*\tau - \tau$ $d_\hbar$-fermée $\Rightarrow$ $d_\hbar$-exacte.

[$\phi^*\tau$ s'annule sur le voisinage de F $\Rightarrow \tau$ $d_\hbar$-exacte]

Lemme 2 : supposons que $S^1 \overset{Ham.}{\circlearrowright} (M,\omega)$ avec $H : M \to \mathbb{R}$ avec points fixes isolés.

Alors $\forall p \in F$, $\exists\ \tau_p \in \Omega^{2n}_{S^1}(M)$ qui est supportée sur un voisinage de p et $\int_M \tau_{p,2n} = 1$.

$\tau_{p,0}(p) = \gamma(p)$ = produit des poids et $d_\hbar \tau_p = 0$.

<u>démo</u>: $T_pM = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, $\phi_i : E_i \underset{w_i \text{ tours}}{\longrightarrow} S^2$ tq $\phi_i(0) = p_S$, $\phi_i(E_i \setminus B) = p_N$.

ϕ_i est équiv. pour l'action de S^1 de poids w_i.

Soit ω_0 une forme symplectique sur S^2 de volume total 1 et $H_0 : S^2 \to [-1, 0]$ qui engendre la rotation (de poids 1).

$$\tau_p = \prod_{i=1}^{n} \phi_i^*(\omega_0 - w_i \hbar H_0).$$

<u>Preuve du thm</u>: $\forall k \geq n$ $\tau = \hbar^{n-k}(\omega - \hbar H)^k - \sum_{p\in F} \frac{(-H(p))^n}{\gamma(p)} \tau_p$ satisfait le lemme 1 donc $\int_M \tau_{2n} = 0$.

$$\int_M \tau_{2n} = \int_M \binom{k}{n} (-H)^{k-n} \omega^n = \sum_p \frac{(-H(p))^k}{\gamma(p)}$$