Actions de groupes

M var. C^∞ $\qquad \phi \in \mathrm{Diff}(M)$

$\phi \circlearrowright C^\infty(M) \qquad (\phi f) = f \circ \phi^{-1}$

... sur les champs de vecteurs , formes différentielles

noté $A(M)$, ϕ commute avec différentielle d

et avec $\wedge$

$$\phi(\alpha \wedge \beta) = \phi(\alpha) \wedge \phi(\beta)$$

Actions de $\mathbb{R}$ par difféo. $\quad \mathbb{R} \times M \to M$

$(t, p) \mapsto \phi_t(p)$

① $\forall p \in M \quad \phi_0(p) = p$. ② $\forall p \in M \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \quad \phi_{s+t}(p) = \phi_s(\phi_t$

: $X(p) = \frac{d}{dt}(\phi_t(p)) \longleftrightarrow \phi$ satisfait ① , ② .

⇝ dérivée de Lie d'un chps de vecteur.

$$\mathcal{L}(X)(\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} \phi_t(\alpha) \Big|_{t=0}$$

dépend de X au voisinage de α.

$$\mathcal{L}(X)(v) = [X, v]$$

Cartan : $\forall \alpha \in \mathcal{A}(M)$ $\quad \mathcal{L}_X \alpha = (d\iota_X + \iota_X d)\alpha$

Rem une forme diff. inv. par ϕ_t a une dérivée de Lie Nulle.

Action d'un groupe de Lie G

$$\phi : G \times M \xrightarrow{C^\infty} M \quad \text{tq.} \quad \phi(Id, p) = p \quad \forall p \in M$$

$$\phi(gh, p) = \phi(g, \phi(h, p))$$

⇝ action sur les tenseurs, formes différentielles.

notation $\phi(g, \alpha) = g\alpha$

$$X \in \mathfrak{g} = \text{Lie } G \quad \rightsquigarrow \quad V_X \in \Gamma(TM)$$

$$V_X(p) = \frac{d}{dt}(\exp(tX)\cdot p)$$

Rem V_X n'est pas forcément invariant.