ISFA
Processus stochastiques - Master Actuariat | Semestre automne 2017-2018
Vincent Lerouvillois | lerouvillois@math.univ-lyon1.fr

Neuvième séance
Révisions

---

1 D'autres exos

Exercice 1. Temps de sortie d'un intervalle centré
Soit B_t un mouvement brownien. Pour tout $a > 0$, on pose :

$$T_a = \inf\{t \geq 0, |B_t| = a\}$$

1. Justifier que T_a est un temps d'arrêt. ♠ Pourquoi a-t-on que $T_a < +\infty$ presque sûrement ?
2. En utilisant une des martingales du mouvement Brownien et un théorème d'arrêt, montrer que la transformée de Laplace de T_a vaut :
$$\mathbb{E}[e^{-\lambda T_a}] = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\lambda})}, \ \forall \lambda > 0.$$
3. ♠ En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T_a]$.

Exercice 2. Encore une EDS
En posant $Y_t = (1+t)X_t$, résoudre l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = -\dfrac{X_t}{1+t}dt + \dfrac{\sigma}{1+t}dB_t \\ X_0 = x_0, \end{cases}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Montrer que X_t converge presque sûrement lorsque t tend vers $+\infty$ vers une limite que l'on précisera.

2 Retour sur des anciens TDs

Exercice 3. [Martingale de Doob]
Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On définit le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Y_n = E[X|\mathcal{F}_n]$. Montrez que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

Exercice 4. **[Martingale et processus prévisible]** Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus prévisible, ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout n, H_n est borné et on définit le processus $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $N_0 = 0$ et :

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1}) \text{ si } n \geq 1\,.$$

Montrez que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. **[Principe de réflexion]** Le but de cet exercice est d'utiliser un principe dit "de réflexion" pour prouver l'égalité suivante qui permet de connaître la loi jointe d'un mouvement Brownien et du processus "supremum du mouvement Brownien" : Soit B un mouvement Brownien. Pour tou $t \in \mathbb{R}_+$, on note $S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s$. On veut montrer que :

$$\forall t \geq 0,\, \forall a \geq 0,\, \forall b \leq a\,, \mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_t \leq b\right] = \mathbb{P}\left[B_t \geq 2a - b\right]\,.$$

1. On note T_a le premier temps d'atteinte de a par le mouvement Brownien. On note $B^a_s = B_{s+T_a} - B_{T_a}$. Que pouvez-vous dire de $(B^a_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$?
2. Montrez que $\mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_t \leq b\right] = \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\, B^a_{t-T_a} \leq b - a\right]$.
3. En déduire que $\mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_t \leq b\right] = \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\, B^a_{t-T_a} \geq a - b\right]$.
4. Conclure.

Exercice 6. **[Le théorème de Dambis–Dubins–Schwarz et la convergence des martingales]** Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale locale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On suppose que M est issue de 0 et qu'elle est presque sûrement continue. Le théorème de Dambis–Dubins–Schwarz est le résultat suivant : il existe un mouvement Brownien $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (pas forcément adapé à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$!) tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\, M_t = B_{<M>_t}\,.$$

En déduire les propriétés suivantes : (1) M_t converge p.s. quand t tend vers $+\infty$ si et seulement si $<M>_\infty < +\infty$ p.s. ; (2) l'événement $\{<M>_\infty = +\infty\}$ est égal à l'événement $\{\sup_{s\in\mathbb{R}_+} M_s = -\inf_{s\in\mathbb{R}_+} M_s = +\infty\}$.

Exercice 7. **[Le retour du théorème d'arrêt]** On considère l'équation stochastique :

$$X_0 = 1,\, dX_t = \frac{1}{2}e^{-X_t^2}dt + e^{-X_t^2/2}dB_t\,.$$

Que dire de e^{-X_t} ? Soit τ le temps d'atteinte par X_t de $\{0, 2\}$. On admettra que $\tau < +\infty$ p.s.. Quelle est la probabilité que $X_\tau = 0$? (Indication : On rappelle qu'une martingale locale bornée est une martingale et on appliquera le théorème d'arrêt.)