ISFA 2° année
Processus Stochastiques
Examen du 15 janvier 2018
Durée : 2 heures
Aucun document autorisé - calculatrices interdites

Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités séparément

Questions de cours

1. Donner la propriété d'accroissements indépendants stationnaires du mouvement brownien.
2. Donner la définition d'une sous-martingale continue.
3. Donner la définition de la variation quadratique d'une martingale.

Exercice 1 Ruine du joueur non-équitable

1. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = -1) = p$, où $p \in]0,1[$. Soit $a \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = a + \sum_{i=1}^n Y_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (et $S_0 = a$). Montrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par :
$$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$$
est une martingale par rapport à la filtration naturelle des Y_i.
2. Soit $p \in]0,1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$. Deux joueurs, le joueur A possédant initialement a euros et le joueur B en possédant b, jouent au jeu suivant. A chaque coup, les deux joueurs misent un euro et on lance une pièce de monnaie qui tombe sur pile avec probabilité p et sur face avec probabilité $1-p$. Si le résultat de la pièce est pile, le joueur A remporte la mise et si le résultat de la pièce est face, le joueur B remporte la mise. Le jeu cesse quand l'un des deux est ruiné.
   (a) Soit S_n l'argent du joueur A au temps n. Soit
   $$T = \inf\{n \in \mathbb{N} \,:\, S_n \in \{0, a+b\}\}.$$
   Justifier que T définit bien un temps d'arrêt par rapport à la filtration naturelle des Y_i.
   (b) On admet que $T < +\infty$ presque sûrement. En appliquant le théorème d'arrêt à $M_{T\wedge n}$, montrer que la probabilité que A gagne la fortune de B vaut :
   $$\mathbb{P}(S_T = a+b) = \frac{(\frac{1-p}{p})^a - 1}{(\frac{1-p}{p})^{a+b} - 1}.$$

Exercice 2 Une EDS sur $[0,1[$
On considère l'équation différentielle stochastique (EDS) définie pour $t \in [0,1[$:
$$\begin{cases} dX_t = \dfrac{x - X_t}{2(1-t)}dt + \sigma dB_t \\ X_0 = 0, \end{cases}$$
où $x \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

1. Soit $(X_t)_{t\in[0,1[}$ une solution de cette EDS. Appliquer la formule d'Itô au processus $Y_t = \frac{X_t}{\sqrt{1-t}}$.
2. En déduire que l'EDS admet une unique solution et que cette solution vérifie :
$$X_t = x(1 - \sqrt{1-t}) + \sqrt{1-t}\int_0^t \frac{\sigma}{\sqrt{1-s}}dB_s$$

3. Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien et calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction covariance.
4. Montrer que $X_t \xrightarrow[t\to 1]{L^2} x$.

Exercice 3 On considère un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant l'équation stochastique suivante :

$$X_0 = \frac{1}{2}\,;\; dX_t = \cos(X_t)\,dB_t + \cos^2(X_t)\,dt\,.$$

Pour résoudre cet exercice, on se souviendra que si M est une martingale locale et que T est un temps d'arrêt, alors $(M_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est toujours une martingale locale. On se souviendra aussi qu'une martingale locale bornée est une (vraie !) martingale.

1. Appliquez la formule d'Itô à $Y_t = \exp(-2X_t)$. Qu'en déduisez-vous ?
2. On note τ le premier temps d'atteinte par X de $\{0, 1\}$:

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t = 0 \text{ ou } X_t = 1\}\,.$$

   Que pouvez-vous dire de $(Y_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$?
3. On admet que $\tau < +\infty$ p.s.. Quelle est la probabilité que $X_\tau = 0$?

Exercice 4 Dans cet exercice, on se propose d'estimer la probabilité qu'un mouvement Brownien reste proche d'une courbe (pas aléatoire) qu'on s'est préalablement donnée. Pour cela, on fixe tout d'abord un $\epsilon > 0$ et une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui est C^2, vérifie $f(0) = 0$ et $f''(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Et on va vouloir estimer la probabilité suivante :

$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0, 1],\, |B_t - f(t)| \leq \epsilon\right]\,.$$

Bien sûr, B est un mouvement Brownien (standard, issu de 0). Le but est de comparer cette quantité à la quantité (plus simple à estimer) :

$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0, 1],\, |B_t| \leq \epsilon\right]\,.$$

1. On note $X_t = \int_0^t -f'(s)dB_s$. Expliquez pourquoi le processus $\left(Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t f'(s)^2 ds)\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.
2. Rappelez le théorème de Girsanov.
3. On note Q la mesure de probabilité définie sur la tribu $\mathcal{F}_1$ (la tribu de tout ce qui se passe avant le temps 1) et de densité Z_1 par rapport à $\mathbb{P}$. Que pouvez-vous dire du processus $(\widetilde{B}_t = B_t + f(t))_{t\in[0,1]}$ sous Q ?
4. En déduire que :

$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0, 1],\, |B_t - f(t)| \leq \epsilon\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_{\{\forall t\in[0,1],\, |B_t|\leq\epsilon\}} Z_1\right]\,.$$

5. En appliquant la formule d'Itô, montrez que :

$$f'(t)B_t = -X_t + \int_0^t B_s f''(s)ds\,.$$

6. En vous rappelant que f'' est positive, déduisez-en que, sous l'événement $\{\forall t \in [0, 1],\, |B_t| \leq \epsilon\}$, on a :

$$Z_1 \leq \exp\left(\epsilon\left(|f'(1)| + \int_0^1 f''(t)dt\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt\right)\,.$$

7. Application dans le cas $f(t) = at^2$ pour un certain $a > 0$. Montrez que :

$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0, 1],\, |B_t - at^2| \leq \epsilon\right] \leq \exp\left(-\frac{2a^2}{3} + 4a\epsilon\right)\mathbb{P}\left[\forall t \in [0, 1],\, |B_t| \leq \epsilon\right]\,.$$

Correction

Exercice 1

Question 1 : On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des Y_n. Montrons que, pour tout n : (a) M_n est intégrable, (b) M_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$ et (c) $\mathbb{E}\left[M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\right] = M_n$. Cela impliquera le résultat voulu.

(a) On remarque que $S_n \in [a-n, a+n]$ et que donc, à p fixé, $M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ est bornée. En particulier, M_n est intégrable.

(b) S_n est une somme de variables $\mathcal{F}_n$-mesurables donc est aussi $\mathcal{F}_n$-mesurable. De plus, M_n est une fonction continue de S_n donc est aussi $\mathcal{F}_n$-mesurable.

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}} M_n \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] \\
&= M_n\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] \quad \text{car } M_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\
&= M_n\mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}}\right] \quad \text{car } Y_{n+1} \text{ est indépendante de } M_n \\
&= M_n \times \left(p\frac{1-p}{p} + (1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{-1}\right) \\
&= M_n \times (1-p+p) \\
&= M_n\,.
\end{aligned}$$

Question 2.a : Montrons pour cela que $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n. Or :

$$\begin{aligned}
\{T \leq n\} &= \{\exists m \leq n \,:\, S_m \in \{0, a+b\}\} \\
&= \bigcup_{m=0}^{n} \{S_m \in \{0, a+b\}\}\,.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $m \leq n$, S_m est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_m$ donc $\{S_m \in \{0, a+b\}\} \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$. L'événement $\{T \leq n\}$ s'écrit donc comme union d'événements $\mathcal{F}_n$-mesurables donc l'est aussi.

Question 2.b : Fixons d'abord un temps $n \in \mathbb{N}$ qu'on fera tendre vers $+\infty$. T et n étant des temps d'arrêt, $T \wedge n$ est aussi un temps d'arrêt. De plus, il est borné et est plus grand que le temps d'arrêt 0, on peut donc appliquer le théorème d'arrêt à la martingale M et aux deux temps d'arrêt $T \wedge n$ et 0. On obtient :

$$\mathbb{E}\left[M_{T\wedge n}\,|\,\mathcal{F}_0\right] = M_0 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^a.$$

En prenant l'espérance on obtient :

$$\mathbb{E}\left[M_{T\wedge n}\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^a.$$

On va maintenant faire tendre n vers $+\infty$. Remarquons d'abord que, pour tout n, $|M_{T\wedge n}|$ est bornée par $\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}$ si $p < 1/2$ et par 1 si $p > 1/2$ (en effet, si $p < 1/2$ alors $\frac{1-p}{p} > 1$ et si $p > 1/2$, $\frac{1-p}{p} < 1$). Remarquons aussi que, comme on a supposé que $T < +\infty$ p.s., $M_{T\wedge n}$ converge p.s. vers M_T. En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient que :

$$\mathbb{E}\left[M_T\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^a.$$

Or, $M_T = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b} \mathbf{1}_{S_T=a+b} + \mathbf{1}_{S_T=0}$ et $\mathbf{1}_{S_T=0} = 1 - \mathbf{1}_{S_T=a+b}$ donc :

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b} \mathbb{P}\left[S_T = a+b\right] + 1 - \mathbb{P}\left[S_T = a+b\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a},$$

ce qui implique que :

$$\mathbb{P}\left[S_T = a+b\right] = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b} - 1}.$$

Exercice 2 :

Question 1 : Notons $f \,:\, (x,t) \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-t}}$ (qui est bien C^2 sur $\mathbb{R} \times [0,1[$). On remarque que, comme le processus d'Itô t n'a pas de partie martingale stochastique et comme $\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} f = 0$, la formule d'Itô appliquée à f et au couple de processus d'Itô (X_t, t) s'écrit :

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,t)\,dX_t \\
&= \frac{1}{2}(1-t)^{-3/2} X_t\,dt + (1-t)^{-1/2} dX_t \\
&= \frac{1}{2}(1-t)^{-3/2} X_t\,dt + (1-t)^{-1/2}\frac{x - X_t}{2(1-t)}\,dt + (1-t)^{-1/2}\sigma dB_t \\
&= (1-t)^{-1/2}\sigma dB_t + \frac{1}{2}(1-t)^{-3/2}(X_t - X_t + x)\,dt \\
&= (1-t)^{-1/2}\sigma dB_t + \frac{x}{2}(1-t)^{-3/2}\,dt\,.
\end{aligned}$$

Question 2 : Le résultat de la question précédente implique que :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (1-s)^{-1/2}\sigma dB_s + \int_0^t \frac{x}{2}(1-s)^{-3/2}\,ds = \int_0^t (1-s)^{-1/2}\sigma dB_s + x((1-t)^{-1/2} - 1)\,.$$

Et donc :

$$X_t = \sqrt{1-t}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\sigma dB_s + x(1 - \sqrt{1-t})\,.$$

Question 3 : Montrons tout d'abord que $\left(Z_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}} dB_s\right)_{t\in[0,1[}$ est un processus Gaussien. Cela vient du fait que c'est une intégrale de Wiener (en effet, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est une fonction déterministe et elle est bien dans $L^2([0,T])$ pour tout $T < 1$ car elle est bornée par $\frac{1}{\sqrt{1-T}}$ sur $[0,T]$).

Montrons maintenant que $(X_t)_{t\in[0,1[}$ est un processus Gaussien. On se donne $0 \le t_1 < \cdots < t_n < 1$ des temps et on veut montrer que toute combinaison linéaire des X_{t_i} est une variable Gaussienne. Mais une combinaison linéaire des X_{t_i} est aussi une combinaison linéaire des Z_{t_i} donc on a bien le résultat.

Calculons maintenant les fonctions espérance et covariance. En utilisant encore que Z est un processus Wiener on obtient :

$$\mathbb{E}\left[Z_t\right] = 0 \text{ pour tout } t \in [0,1[\,.$$

Comme $X_t = \sqrt{1-t} Z_t + x(1 - \sqrt{1-t})$, cela implique que :

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = x(1 - \sqrt{1-t})\,.$$

De plus on a, pour $0 \le s \le t < 1$:

$$\mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \int_0^s \left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}\right)^2 du = \int_0^s \frac{1}{1-u} du = -\ln(1-s)\,.$$

Comme $X_t = \sqrt{1-t}Z_t + x(1-\sqrt{1-t})$, cela implique que :

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = -\ln(1-s)\sqrt{1-t}\sqrt{1-s}\,.$$

Question 4 : Utilisons les calculs de la question précédente. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_t - x)^2\right] &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}\left[X_t\right] - x\sqrt{1-t})^2\right] \\
&= \mathrm{Var}(X_t) - 2x\sqrt{1-t}\,\mathbb{E}\left[X_t - \mathbb{E}\left[X_t\right]\right] + x^2(1-t) \\
&= -\ln(1-t)(1-t) + x^2(1-t)\,,
\end{aligned}$$

ce qui converge bien vers 0 quand t tend vers 1.

Exercice 3 :

Question 1 : Appliquons la formule d'Itô à la fonction $f\,:\,x \mapsto \exp(-2x)$ (qui est bien C^2) et au processus d'Itô X. Remarquons pour cela que, d'après l'équation donnée dans l'énoncé, $< X >_t = \int_0^t \cos^2(X_s)ds$ pour tout $t \geq 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
dY_t &= -2\exp(-2X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} \times 4\exp(-2X_t)\,d < X >_t \\
&= -2\exp(-2X_t)\,\cos(X_t)\,dB_t - 2\exp(-2X_t)\,\cos^2(X_t)\,dt + 2\exp(-2X_t)\cos^2(X_t)\,dt \\
&= -2\exp(-2X_t)\,\cos(X_t)\,dB_t\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que X est une martingale locale.

Question 2 : Le processus $(Y_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ est une martingale locale car Y est une martingale et car τ est un temps d'arrêt. De plus, $|Y_{t\wedge\tau}|$ est bornée par 1 pour tout $t \geq 0$ donc (d'après le rappel dans l'énoncé) c'est une (vraie) martingale.

Question 3 : Appliquons le théorème d'arrêt à la martingale $(Y_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$. Pour cela, on doit se donner deux temps d'arrêt bornés (en fait, l'hypothèse borné n'est pas nécessaire car $(Y_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ est bornée donc uniformément intégrable). Ici, on se donne t et 0 deux temps d'arrêt déterministes (bornés et vérifiant $t \geq 0$) et on déduit du théorème d'arrêt que :

$$\mathbb{E}\left[Y_{t\wedge\tau}\,|\,\mathcal{F}_t\right] = Y_0 = e^{-1}\,,$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la tribu naturelle associée à B. En prenant l'espérance, on déduit que :

$$\mathbb{E}\left[Y_{t\wedge\tau}\right] = e^{-1}\,.$$

On va maintenant faire tendre t vers $+\infty$. Remarquons d'abord que, pour tout n, $|Y_{t\wedge n}|$ est bornée par 1. Remarquons aussi que, comme on a supposé que $\tau < +\infty$ p.s., $Y_{\tau\wedge t}$ converge p.s. vers Y_τ. En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient que :

$$\mathbb{E}\left[Y_\tau\right] = e^{-1}\,.$$

Or, $\mathbb{E}\left[Y_\tau\right] = \mathbb{P}\left[X_\tau = 0\right] + e^{-2}\mathbb{P}\left[X_\tau = 1\right] = \mathbb{P}\left[X_\tau = 0\right](1 - e^{-2}) + e^{-2}$, ce qui donne :

$$\mathbb{P}\left[X_\tau = 0\right] = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{1 - e^{-2}}\,.$$

Exercice 4 :

Question 1 : D'après le théorème de Novikov, il suffit de montrer que $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f'(s)^2 ds\right)\right] < +\infty$ pour tout t. Or, f' est déterministe, donc cela revient seulement à dire que $\int_0^t f'(s)^2 ds < +\infty$ pour tout t, ce qui est le cas par exemple car $(f')^2$ est continue.

Question 2 : Théorème de Girsanov : Soit T un horizon fini et soit $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ un bon processus local vérifiant la condition de Novikov. Soit Z la martingale définie par $Z_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit Q_T la mesure de probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par $Q_T(d\omega) = Z_T(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ (où $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle de B). Alors, $\left(B_t - \int_0^t \theta_s ds\right)_{0\leq t\leq T}$ est un mouvement Brownien sous la mesure Q_T.

Question 3 : D'après le théorème de Girsanov avec $T = 1$ et $(\theta_t = -f'(t))_{t\in[0,1]}$ (qui est bien un bon processus local vérifiant la condition de Novikov d'après la question 1), le processus $\left(B_t - \int_0^t(-f'(s))ds\right)_{0\leq t\leq 1}$ est un mouvement Brownien sous la mesure Q. Or, le théorème fondamental de l'analyse implique que $-\int_0^t(-f'(s))ds = f(t) - f(0) = f(t)$ (comme $f(0) = 0$). Donc $(\widetilde{B}_t)_{t\in[0,1]}$ est un mouvement Brownien sous Q.

Question 4 : Comme B sous $\mathbb{P}$ a la même loi que $\widetilde{B}$ sous Q, on a :

$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t - f(t)| \leq \epsilon\right] = Q\left[\forall t \in [0,1],\, |\widetilde{B}_t - f(t)| \leq \epsilon\right].$$

Or, $\widetilde{B}_t - f(t) = B_t$ et Q a pour densité Z_1 par rapport à $\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_1}$ donc :

$$Q\left[\forall t \in [0,1],\, |\widetilde{B}_t - f(t)| \leq \epsilon\right] = Q\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t| \leq \epsilon\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_{\{\forall t\in[0,1],\, |B_t|\leq\epsilon\}} Z_1\right].$$

Question 5 : On va appliquer la formule d'Itô à $g : (x,t) \mapsto xf'(t)$ et au couple de processus d'Itô (t, B_t) (ce qui est possible car t n'a pas de partie martingale locale et car g est C^1 sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ et C^2 en la première coordonnée). En utilisant que t n'a pas de partie martingale locale et que $\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} g = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} d(f'(t)B_t) &= \frac{\partial g}{\partial t}(t,B_t)\,dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,B_t)\,dB_t \\ &= f''(t)B_t\,dt + f'(t)\,dB_t\,. \end{aligned}$$

Et donc :

$$f't)B_t = f'(0)B_0 + \int_0^t f''(s)B_s ds + \int_0^t f'(s)dB_s = 0 + \int_0^t f''(s)\,dB_s - X_t\,.$$

(Remarque : en cours, il a été vu qu'il fallait g C^2 pour appliquer Itô. Ici on utilise quelque chose d'un peu plus précis. Si on veut utiliser le théorème du cours, on peut appliquer la formule d'Itô à $(x,y) \mapsto xy$ et au couple de processus d'Itô $(B_t, f'(t))$ i.e. on peut faire une intégration par parties.)

Question 6 : D'après la question précédente, on a :

$$Z_1 = \exp\left(\int_0^1 f''(t)B_t\,dt - f'(1)B_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,dt\right).$$

Or, exp est croissante, donc Z_1 est inférieur ou égal à :

$$\exp\left(\left|\int_0^1 f''(t)B_t\,dt - f'(1)B_1\right| - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,dt\right) \leq \exp\left(\int_0^1 f''(t)|B_t|\,dt + |f'(1)||B_1| - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,dt\right).$$

(On a utilisé ici que $f'' \geq 0$.) Et donc, sur l'événement $\{\forall t\in[0,1],\, |B_t| \leq \epsilon\}$, on a :

$$Z_1 \leq \exp\left(\int_0^1 f''(t)\epsilon\,dt + |f'(1)|\epsilon - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,dt\right).$$

Question 7 : D'après la question précédente (et comme on a bien f C^2, et vérifiant $f''_{|[0,1]} \geq 0$ et $f'(0) = 0$), il suffit de montrer que $\int_0^1 f''(t)\,dt + |f'(1)| = 4a$ et $\frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,dt = \frac{2a^2}{3}$. Or :

$$\int_0^1 f''(t)\,dt + |f'(1)| = f'(1) - f'(0) + |f'(1)| = 2a - 0 + 2a = 4a\,,$$

et :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,dt = 2a^2\int_0^1 t^2 dt = \frac{2a^2}{3}\,.$$