Fiche de TD 5, corrigé

Exercice 1 :

3) • $\beta(0,7) = \mathbb{P}_{p=0,7}(R) = \mathbb{P}_{p=0,7}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i < 40\right) + \mathbb{P}_{p=0,7}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 60\right)$

• Par le TCL, $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \to \infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$

Pour $n = 100$, $p = 0,7$: $\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 70}{\sqrt{21}} \simeq \mathcal{N}(0,1)$

• D'où $\mathbb{P}_{p=0,7}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i < 40\right) = \mathbb{P}_{p=0,7}\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 70}{\sqrt{21}} < \dfrac{40-70}{\sqrt{21}}\right)$

$\simeq \mathbb{P}\left(Z < \dfrac{-30}{\sqrt{21}}\right)$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

• De même, $\mathbb{P}_{p=0,7}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 60\right) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \dfrac{-10}{\sqrt{21}}\right)$

D'où $\beta(0,7) \simeq \mathbb{P}\left(Z < \dfrac{-30}{\sqrt{21}}\right) + \mathbb{P}\left(Z > \dfrac{-10}{\sqrt{21}}\right)$

$= 1 - \phi\left(\dfrac{30}{\sqrt{21}}\right) + \phi\left(\dfrac{10}{\sqrt{21}}\right)$ avec $\phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$

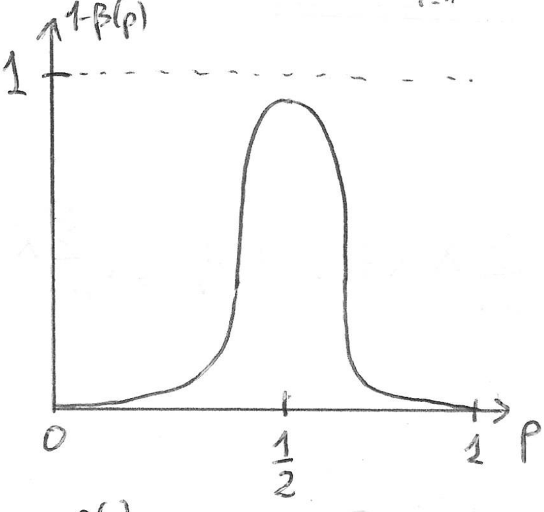
et $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

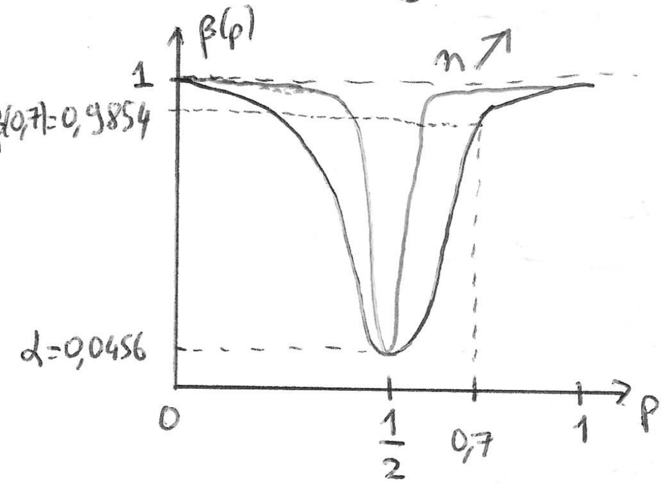
• Or $\dfrac{30}{\sqrt{21}} \simeq 6,55$ et $\phi(6,55) \simeq 1$

$\dfrac{10}{\sqrt{21}} \simeq 2,18$ et $\phi(2,18) \simeq 0,9854$

D'où $\boxed{\beta(0,7) \simeq 0,9854}$

4) $1-\beta(p) = \mathbb{P}_p\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i - 50\right| \leq 10\right)$. Il s'agit du risque de seconde espèce qui est maximal en $p=\frac{1}{2}$ et symmétrique par rapport à $\frac{1}{2}$.





<u>Rq</u>: • $\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha$.

• Lorsque le nombre de lancer n augmente, à niveau de test α fixé, la courbe de β devient de plus en plus "pointue".

5) On fait l'expérience et observe 57 faces.
On accepte donc l'hypothèse de perfection.

"La p-value est le niveau du test limite qui accepte la valeur 57"

$$\text{p-value}(57) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i - 50\right| > 7\right)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{5} \simeq \mathcal{N}(0,1) \longrightarrow \simeq \mathbb{P}\left(|Z| > \frac{7}{5}\right) \quad \text{avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= 2\,\mathbb{P}\left(Z > \frac{7}{5}\right) = 2\left(1-\Phi(1,4)\right)$$

On lit $\Phi(1,4) \simeq 0,9192$

D'où $\boxed{\text{p-value}(57) \simeq 0,1616}$

$\boxed{\text{On a bien p-value} \geq \alpha}$

Rq: H_0 est accepté $\Leftrightarrow$ p-value $\geq \alpha$

Exercice 2 :

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1) • On veut tester l'hypothèse $\boxed{H_0 : \lambda = \lambda_0 \text{ contre } H_1 : \lambda = \lambda_1}$

avec $0 < \lambda_0 < \lambda_1$.

Il s'agit d'un <u>test d'hypothèses simples</u>.

• Le <u>lemme de Neyman-Pearson</u> nous dit que les tests de Neyman-Pearson sont <u>plus puissants</u>.

Un test de N-P est un test de région de rejet du type :

$R_k : \{V_{\lambda_0,\lambda_1}(X) > k\}$ où $V_{\lambda_0,\lambda_1}(X) = \dfrac{L(X,\lambda_1)}{L(X,\lambda_0)}$

est le <u>rapport de vraisemblance</u>.

• On a, $\forall \lambda > 0$, $L(X,\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda T_n}$ avec $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$

D'où $$\boxed{V_{\lambda_0,\lambda_1}(X) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n e^{-(\lambda_1-\lambda_0)T_n}}$$

(<u>Rq</u> : V_{λ_0,λ_1} ne dépend que de la statistique exhaustive T_n.)

• $t \to V_{\lambda_0,\lambda_1}(t) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n e^{-(\lambda_1-\lambda_0)t}$ est <u>strictement décroissante</u>

car $\lambda_1 - \lambda_0 > 0$.

Donc <u>$V_{\lambda_0,\lambda_1}(T_n) > k \iff T_n < k'$</u> pour un certain $k' > 0$.

$(k' = V^{-1}_{\lambda_0,\lambda_1}(k))$

Par le lemme de Neyman-Pearson, les tests de la forme

$R_{k'} : \{T_n < k'\}$ sont plus puissants

ou encore $\underline{R_{k''} : \{2\lambda_0 T_n < k''\}}$ (avec $k'' = 2\lambda_0 k'$)

. Or, $2\lambda_0 T_n \sim \chi^2(2n)$

donc pour $k'' = k_\alpha^{2n}$ le quantile d'ordre α de la loi $\chi^2(2n)$,

$$\mathbb{P}_{\lambda_0}\left(R_{k_\alpha^{2n}}\right) = \mathbb{P}_{\lambda_0}\left(2\lambda_0 T_n < k_\alpha^{2n}\right) = \alpha$$

Donc le test $\phi_{k_\alpha^{2n}}$ de région de rejet $R_{k_\alpha^{2n}} = \{2\lambda_0 T_n < k_{1-\alpha}^{2n}\}$ est le <u>test de niveau α</u> <u>plus puissant</u>.

2) . On veut tester $\underline{H_0 : \lambda = \lambda_0}$ contre $\underline{H_1 : \lambda > \lambda_0}$

H_1 est une hypothèse composite.

. $\forall \lambda > \lambda_0$, $t \mapsto V_{\lambda_0,\lambda}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^n e^{-(\lambda-\lambda_0)t}$ est <u>strictement décroissante</u>

donc d'après le <u>corollaire du lemme de Neyman-Pearson</u> :

Les tests de région de rejet $R_k : \{V_{\lambda_0,\lambda}(T_n) > k\} \Leftrightarrow \{T_n < k'\}$

sont <u>uniformements plus puissants</u>

Donc le test précédent de région de rejet : $R_{k_\alpha^{2n}} : \{2\lambda_0 T_n < k_\alpha^{2n}\}$

est u.p.p et de niveau α.

3) On veut tester $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$.

(Rq : $H_1 : \lambda \in \Theta_1$ avec $\Theta_1 =]-\infty, \lambda_0[\cup]\lambda_0, +\infty[$ n'est pas unilatéral donc on ne peut pas appliquer le corollaire du lemme de Neyman-Pearson comme à la question précédente.)

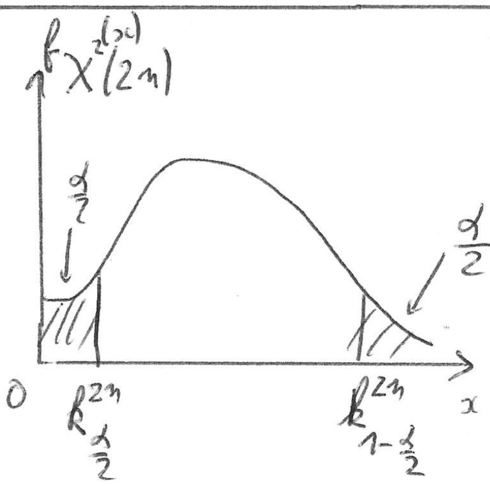
↳ On va simplement construire un test de niveau α de région de rejet bilatérale (qui ne sera pas u.p.p).

On a $\mathbb{P}_{\lambda_0}\left(k^{2n}_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant 2\lambda_0 T_n \leqslant k^{2n}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

d'où $\mathbb{P}_{\lambda_0}(R) = \alpha$ pour $R = \{2\lambda_0 T_n < k^{2n}_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{2\lambda_0 T_n > k^{2n}_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

D'où le test de niveau α de région de rejet :

$$\boxed{R = \{2\lambda_0 T_n < k^{2n}_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{2\lambda_0 T_n > k^{2n}_{1-\frac{\alpha}{2}}\}}$$



Rq : Le test revient à calculer $2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i$ au vu des observations et à rejeter H_0 si cette quantité appartient à la partie hachurée.