

Fiche de TD N° 4 : NORMALITÉ ASYMPTOTIQUE ET INTERVALLES DE CONFIANCE**Exercice 1.**

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$, un n -échantillon issu d'une loi exponentielle de paramètre inconnu $\lambda > 0$. On rappelle que l'estimateur du maximum de vraisemblance est : $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$.

1. En utilisant les propriétés asymptotiques de l'EMV vues en cours, montrer que $\hat{\lambda}_n$ est asymptotiquement normal et préciser la variance asymptotique.
2. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la δ -méthode.
3. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour λ .
4. En se basant sur le pivot $2\lambda \sum_{i=1}^n X_i$, déterminer un intervalle de confiance exacte de niveau α pour λ . (Indication : les lois $\chi^2(n)$ et $\Gamma(n/2, 1/2)$ sont les mêmes).

Application Numérique : Calculer les intervalles de confiance de niveau 90% des questions précédentes pour un échantillon de durée de vie de téléphones portables (en mois) :

$$X = (4, 3, 34, 41, 54, 10, 28, 39, 31, 50, 6, 27, 14, 25, 16).$$

Exercice 2.

On considère un échantillon de taille n issu d'une loi à densité paramétrée par $\theta > 0$ définie par :

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \mathbf{1}_{x \in]0,1[}$$

1. Déterminer l'estimateur T_1 de θ obtenu par la méthode des moments.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance T_2 .
3. Montrer que T_1 et T_2 sont asymptotiquement normaux. Comparer leur variances asymptotiques. Sont-ils asymptotiquement efficaces ?
4. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau 99% pour θ basé sur T_2 .

Exercice 3.

Un institut de sondages souhaite estimer le pourcentage p de la population qui va voter pour le Maire actuel à la prochaine élection avec une précision de 1%. Pour cela, on interroge un échantillon de n personnes et on note F_n la fréquence empirique des intentions de vote pour le Maire.

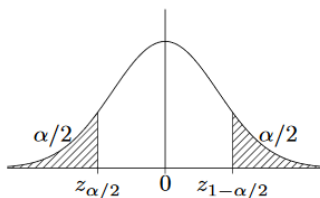
1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer le nombre n de personnes qu'il suffit d'interroger pour avoir un intervalle de confiance de précision 1% et de niveau 95% :

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geq 0.01) \leq 0.05$$

2. Même question en utilisant le théorème central limite.

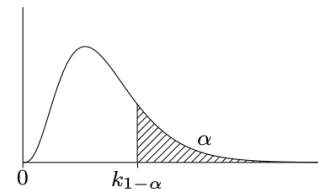
Quantiles de la loi Normale centrée réduite.

Si Z est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, la table suivante donne, pour α fixé, la valeur $z_{1-\alpha/2}$ telle que $\mathbb{P}(|Z| \geq z_{1-\alpha/2}) = \alpha$. Ainsi, $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.



Quantiles de la loi du χ^2 .

Si X suit la loi du χ^2 , à ν degrés de liberté, la table suivante donne la valeur $k_{1-\alpha}(\nu)$ telle que $\mathbb{P}(X \geq k_{1-\alpha}(\nu)) = \alpha$. Ainsi, $k_{1-\alpha}(\nu)$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi du χ^2 à ν degrés de liberté.



| α | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | ∞ | 2,5758 | 2,3263 | 2,1701 | 2,0537 | 1,9600 | 1,8808 | 1,8119 | 1,7507 | 1,6954 |
| 0,1 | 1,6449 | 1,5982 | 1,5548 | 1,5141 | 1,4758 | 1,4395 | 1,4051 | 1,3722 | 1,3408 | 1,3106 |
| 0,2 | 1,2816 | 1,2536 | 1,2265 | 1,2004 | 1,1750 | 1,1503 | 1,1264 | 1,1031 | 1,0803 | 1,0581 |
| 0,3 | 1,0364 | 1,0152 | 0,9945 | 0,9741 | 0,9542 | 0,9346 | 0,9154 | 0,8965 | 0,8779 | 0,8596 |
| 0,4 | 0,8416 | 0,8239 | 0,8064 | 0,7892 | 0,7722 | 0,7554 | 0,7388 | 0,7225 | 0,7063 | 0,6903 |
| 0,5 | 0,6745 | 0,6588 | 0,6433 | 0,6280 | 0,6128 | 0,5978 | 0,5828 | 0,5681 | 0,5534 | 0,5388 |
| 0,6 | 0,5244 | 0,5101 | 0,4959 | 0,4817 | 0,4677 | 0,4538 | 0,4399 | 0,4261 | 0,4125 | 0,3989 |
| 0,7 | 0,3853 | 0,3719 | 0,3585 | 0,3451 | 0,3319 | 0,3186 | 0,3055 | 0,2924 | 0,2793 | 0,2663 |
| 0,8 | 0,2533 | 0,2404 | 0,2275 | 0,2147 | 0,2019 | 0,1891 | 0,1764 | 0,1637 | 0,1510 | 0,1383 |
| 0,9 | 0,1257 | 0,1130 | 0,1004 | 0,0878 | 0,0753 | 0,0627 | 0,0502 | 0,0376 | 0,0251 | 0,0125 |

| α | 10^{-3} | 10^{-4} | 10^{-5} | 10^{-6} | 10^{-7} | 10^{-8} | 10^{-9} |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $z_{1-\alpha/2}$ | 3,2905 | 3,8906 | 4,4172 | 4,8916 | 5,3267 | 5,7307 | 6,1094 |

| $\nu \backslash \alpha$ | 0,990 | 0,975 | 0,950 | 0,900 | 0,100 | 0,050 | 0,025 | 0,010 | 0,001 |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 0,0002 | 0,0010 | 0,0039 | 0,0158 | 2,7055 | 3,8415 | 5,0239 | 6,6349 | 10,8276 |
| 2 | 0,0201 | 0,0506 | 0,1026 | 0,2107 | 4,6052 | 5,9915 | 7,3778 | 9,2103 | 13,8155 |
| 3 | 0,1148 | 0,2158 | 0,3518 | 0,5844 | 6,2514 | 7,8147 | 9,3484 | 11,3449 | 16,2662 |
| 4 | 0,2971 | 0,4844 | 0,7107 | 1,0636 | 7,7794 | 9,4877 | 11,1433 | 13,2767 | 18,4668 |
| 5 | 0,5543 | 0,8312 | 1,1455 | 1,6103 | 9,2364 | 11,0705 | 12,8325 | 15,0863 | 20,5150 |
| 6 | 0,8721 | 1,2373 | 1,6354 | 2,2041 | 10,6446 | 12,5916 | 14,4494 | 16,8119 | 22,4577 |
| 7 | 1,2390 | 1,6899 | 2,1673 | 2,8331 | 12,0170 | 14,0671 | 16,0128 | 18,4753 | 24,3219 |
| 8 | 1,6465 | 2,1797 | 2,7326 | 3,4895 | 13,3616 | 15,5073 | 17,5345 | 20,0902 | 26,1245 |
| 9 | 2,0879 | 2,7004 | 3,3251 | 4,1682 | 14,6837 | 16,9190 | 19,0228 | 21,6660 | 27,8772 |
| 10 | 2,5582 | 3,2470 | 3,9403 | 4,8652 | 15,9872 | 18,3070 | 20,4832 | 23,2093 | 29,5883 |
| 11 | 3,0535 | 3,8157 | 4,5748 | 5,5778 | 17,2750 | 19,6751 | 21,9200 | 24,7250 | 31,2641 |
| 12 | 3,5706 | 4,4038 | 5,2260 | 6,3038 | 18,5493 | 21,0261 | 23,3367 | 26,2170 | 32,9095 |
| 13 | 4,1069 | 5,0088 | 5,8919 | 7,0415 | 19,8119 | 22,3620 | 24,7356 | 27,6883 | 34,5282 |
| 14 | 4,6604 | 5,6287 | 6,5706 | 7,7895 | 21,0641 | 23,6848 | 26,1189 | 29,1412 | 36,1233 |
| 15 | 5,2293 | 6,2621 | 7,2609 | 8,5468 | 22,3071 | 24,9958 | 27,4884 | 30,5779 | 37,6973 |
| 16 | 5,8122 | 6,9077 | 7,9616 | 9,3122 | 23,5418 | 26,2962 | 28,8454 | 31,9999 | 39,2524 |
| 17 | 6,4078 | 7,5642 | 8,6718 | 10,0852 | 24,7690 | 27,5871 | 30,1910 | 33,4087 | 40,7902 |
| 18 | 7,0149 | 8,2307 | 9,3905 | 10,8649 | 25,9894 | 28,8693 | 31,5264 | 34,8053 | 42,3124 |
| 19 | 7,6327 | 8,9065 | 10,1170 | 11,6509 | 27,2036 | 30,1435 | 32,8523 | 36,1909 | 43,8202 |
| 20 | 8,2604 | 9,5908 | 10,8508 | 12,4426 | 28,4120 | 31,4104 | 34,1696 | 37,5662 | 45,3147 |
| 21 | 8,8972 | 10,2829 | 11,5913 | 13,2396 | 29,6151 | 32,6706 | 35,4789 | 38,9322 | 46,7970 |
| 22 | 9,5425 | 10,9823 | 12,3380 | 14,0415 | 30,8133 | 33,9244 | 36,7807 | 40,2894 | 48,2679 |
| 23 | 10,1957 | 11,6886 | 13,0905 | 14,8480 | 32,0069 | 35,1725 | 38,0756 | 41,6384 | 49,7282 |
| 24 | 10,8564 | 12,4012 | 13,8484 | 15,6587 | 33,1962 | 36,4150 | 39,3641 | 42,9798 | 51,1786 |
| 25 | 11,5240 | 13,1197 | 14,6114 | 16,4734 | 34,3816 | 37,6525 | 40,6465 | 44,3141 | 52,6197 |
| 26 | 12,1981 | 13,8439 | 15,3792 | 17,2919 | 35,5632 | 38,8851 | 41,9232 | 45,6417 | 54,0520 |
| 27 | 12,8785 | 14,5734 | 16,1514 | 18,1139 | 36,7412 | 40,1133 | 43,1945 | 46,9629 | 55,4760 |
| 28 | 13,5647 | 15,3079 | 16,9279 | 18,9392 | 37,9159 | 41,3371 | 44,4608 | 48,2782 | 56,8923 |
| 29 | 14,2565 | 16,0471 | 17,7084 | 19,7677 | 39,0875 | 42,5570 | 45,7223 | 49,5879 | 58,3012 |
| 30 | 14,9535 | 16,7908 | 18,4927 | 20,5992 | 40,2560 | 43,7730 | 46,9792 | 50,8922 | 59,7031 |