lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

CC - Correction

1 Vecteurs gaussiens

Exercice 1

1. Une matrice est une matrice de covariance si et seulement si elle est symétrique et semi-définie positive. On a que ${}^t\Sigma = \Sigma$ donc la matrice est symétrique. Pour montrer qu'elle est semi-définie positive, on va calculer les mineurs principaux.

$$\left|4\right| = 4, \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \text{ et } \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Tous les mineurs sont strictement positifs donc la matrice Σ est définie positive, en particulier elle est semi-définie positive, de plus elle est symétrique, on en déduit que c'est une matrice de covariance.

2. Un vecteur aléatoire est un vecteur gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ce vecteur suit une loi normale. Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ deux réels. On a :

$$\begin{aligned} \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 =& \alpha_1(2X_1 + 2X_2) + \alpha_2(X_1 - 2X_3) \\ =& (2\alpha_1 + \alpha_2)X_1 + 2\alpha_1 X_2 - 2\alpha_2 X_3. \end{aligned}$$

Toute combinaison linéaire de Y est donc une combinaison linéaire de X or X est un vecteur gaussien donc toute combinaison linéaire de X suit une loi normale. On en conclut que toute combinaison linéaire de Y suit une loi normale donc Y est un vecteur gaussien.

3. Pour les variances, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_1) =& \mathrm{Var}(2X_1 + 2X_2) = 4\mathrm{Var}(X_1) + 8\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + 4\mathrm{Var}(X_2) = 8, \\ \mathrm{Var}(Y_2) =& \mathrm{Var}(X_1 - 2X_3) = \mathrm{Var}(X_1) - 4\mathrm{Cov}(X_1, X_3) + 4\mathrm{Var}(X_3) = 12. \end{aligned}$$

Pour la covariance, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) =& \mathrm{Cov}(2X_1 + 2X_2, X_1 - 2X_3) \\ =& 2\mathrm{Var}(X_1) - 4\mathrm{Cov}(X_1, X_3) + 2\mathrm{Cov}(X_2, X_1) - 4\mathrm{Cov}(X_2, X_3) \\ =& 0. \end{aligned}$$

On a donc que la matrice de covariance Σ' de Y est donnée par :

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

4. Le vecteur aléatoire (Y_1, Y_2) est une vecteur aléatoire et $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ donc Y_1 et Y_2 sont indépendants.

5. Le vecteur gaussien X est centré donc le vecteur gaussien Y est également centré. Le vecteur aléatoire Y est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Σ' donc sa fonction caractéristique $\varphi_Y : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{C}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \varphi_Y(u_1, u_2) =& e^{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}} \\ =& e^{-\frac{1}{2}(8u_1^2 + 12u_2^2)} \\ =& e^{-4u_1^2 - 6u_2^2} \end{aligned}$$

2 Convergence de suites de variables aléatoires

Exercice 2 (Minimum d'exponentielles)

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$. Soit F_n la fonction de répartition de Y_n, on a :

$$F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Y_n > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \ldots, X_n > x).$$

Les $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ étant iid, on a :

$$1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \ldots, X_n > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)^n.$$

Si $x < 0$, $\mathbb{P}(X_1 > x) = 1$ et donc $F_n(x) = 0$.
Si $x \geq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 > x) = \int_{t=x}^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-x}.$$

On trouve alors $F_n(x) = 1 - (e^{-x})n = 1 - e^{-nx}$. On a donc que la fonction de répartition de Y_n est donnée par :

$$F_n(x) = \left(1 - e^{-nx}\right) 1_{[0,\infty[}(x).$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une exponentielle de paramètre n.

2. Les variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ sont positives donc les variables aléatoires $(Y_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ sont aussi positives. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) = e^{-n\varepsilon}.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ alors $|e^{-\varepsilon}| < 1$ donc la série géométrique de terme générale $e^{-n\varepsilon}$ est sommable. On a donc :

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} e^{-n\varepsilon} = \frac{e^{-\varepsilon}}{1 - e^{-\varepsilon}} < \infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, on en conclut que Y_n converge p.s vers 0.

Exercice 3 (Convergence d'une suite de variable aléatoire)

1. La fonction f_{X_n} définit une densité sur R si et seulement si elle est positive et d'intégrale 1. La fonction est clairement positive, il reste juste à prouver qu'elle est d'intégrale 1. On a :

$$\int_{x\in\mathbf{R}} \frac{n}{(1+nx)^2} 1_{[0,+\infty[}(x)\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\infty} \frac{n}{(1+nx)^2} = \left[-\frac{1}{1+nx}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

On en conclut que f_{X_n} définit bien une densité sur R.

2. Les variables aléatoires X_n sont positives, on a donc pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_n > \varepsilon\right) = \int_{x=\varepsilon}^{\infty} \frac{n}{(1+nx)^2} = \left[-\frac{1}{1+nx}\right]_\varepsilon^{+\infty} = \frac{1}{1+n\varepsilon}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a que :

$$\frac{1}{1+n\varepsilon} \to 0$$

donc $\mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) \to 0$ donc X_n converge en probabilité vers 0.

3. Les $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ étant indépendant, on peut appliquer le lemme de Borel-Cantelli qui nous dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) < \infty.$$

On a :

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n\varepsilon}.$$

De plus on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{1+n\varepsilon} \sim \frac{1}{n\varepsilon}$ et la série de terme générale $\frac{1}{n\varepsilon}$ diverge donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n\varepsilon} = +\infty.$$

On en conclut, par le lemme de Borel-Cantelli, que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.

Exercice 4 (Convergence et marche aléatoire simple)

1. C'est la loi des grands nombres qui donne le résultat pour $n = 1$. Pour tout $\alpha \geq 1$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a que $\frac{|S_n|}{n^\alpha} \leq \frac{|S_n|}{n}$. Par conséquent, si presque sûrement $\frac{S_n}{n} \to 0$ alors presque sûrement $\frac{S_n}{n^\alpha} \to 0$.
2. Soit $\alpha > \frac{1}{2}$. On va appliquer l'inégalité de Tchebychev. On a :

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n^\alpha}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=1}^n 0 = 0.$$

Pour la variance, on utilise le fait que les X_i sont indépendants, on a donc :

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\,(X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \sum_{i=1}^n 1 - 0 = n$$

On a donc

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^{2\alpha}}\mathrm{Var}\,(S_n) = \frac{n}{n^{2\alpha}} = n^{1-2\alpha}.$$

On peut maintenant appliquer l'inégalité de Tchebychev (ce qui revient à montrer la convergence dans L^2). Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha} - 0\right| \geq \varepsilon\right) =& \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \\ \leq& \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right)}{\varepsilon^2} \\ =& \frac{n^{1-2\alpha}}{\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors $n^{1-2\alpha} \to 0$ et donc pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha} - 0\right| \geq \varepsilon\right) \to 0$$

et donc $\frac{S_n}{n^\alpha}$ converge en probabilité vers 0.
3. Soit $\lambda \geq 0$. On a, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X_i}) = \mathbb{P}(X_i = 1)e^\lambda + \mathbb{P}(X_i = -1)e^{-\lambda} = \frac{1}{2}e^\lambda + \frac{1}{2}e^{-\lambda} = \cosh(\lambda).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right) =& \mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum_{i=1}^n X_i}\right) \\ =& \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\lambda X_i}\right) \text{ les } (X_i)_{i\in\mathbf{N}^*} \text{ étant indépendants} \\ =& \prod_{i=1}^n \cosh(\lambda) \\ =& \cosh(\lambda)^n.\end{aligned}$$

4. (a) Pour tout $x \geq 0$, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n \geq x$ si et seulement si $\lambda S_n \geq \lambda x$ donc

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda x}\right).$$

Attention, cet argument est faux pour $\lambda = 0$.
Par l'inégalité de Markov, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda x}\right) \leq & \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right)}{e^{\lambda x}} \\ = & \cosh(\lambda)^n e^{-\lambda x} \text{ d'après la question précédente} \\ \leq & e^{n\frac{\lambda^2}{2} - \lambda x} \text{ d'après l'indication.}\end{aligned}$$

On a bien $\mathbb{P}(S_n \geq x) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda x}\right) \leq e^{n\frac{\lambda^2}{2} - \lambda x}$ pour tout $x \geq 0$ et pour tout $\lambda > 0$.

(b) Soit $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Soit f la fonction de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f : \lambda \to n\frac{\lambda^2}{2} - \lambda x.$$

La fonction f est dérivable et on a :

$$f'(\lambda) = n\lambda - x.$$

On en déduit que f est décroissante sur $\left]0, \frac{x}{n}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{x}{n}, \infty\right[$ donc f admet un minimum en $\frac{x}{n}$ et on a :

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = n\frac{x^2}{2n^2} - x\frac{x}{n} = \frac{x^2}{2n} - \frac{x^2}{n} = -\frac{x^2}{2n}.$$

Pour $x > 0$, d'après la question précédente, en prenant $\lambda = \frac{x}{n}$, on trouve :

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2n}}.$$

Si $x = 0$, on a $e^{-\frac{x^2}{2n}} = 1$ donc

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2n}}.$$

On en conclut que pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2n}}$.

5. On fixe $\alpha > \frac{1}{2}$. On commence par remarquer que la loi des X_i étant symétrique pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, la loi de S_n est symétrique pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On en déduit que pour tout $x \geq 0$

$$\mathbb{P}(S_n \leq -x) = \mathbb{P}(S_n \geq x).$$

On a donc que pour tout $x > 0$:

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq x) = \mathbb{P}(S_n \leq -x) + \mathbb{P}(S_n \geq x) = 2\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2n}}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha} - 0\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon n^\alpha) \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n^{2\alpha}}{2n}} = 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n^{2\alpha-1}}{2}}.$$

Comme $\alpha > \frac{1}{2}$, $2\alpha - 1 > 0$ donc la série de terme générale $2e^{-\frac{\varepsilon^2 n^{2\alpha-1}}{2}}$ est sommable donc pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha} - 0\right| \geq \varepsilon\right) < +\infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, $\frac{S_n}{n^\alpha} \to 0$ presque sûrement.