Éléments de correction de la feuille de TD n° 10: Espérance conditionnelle, suite

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Correction exercice 1 :

1. Comme X est supposée positive, μ est également positive et de plus $\mu(\Omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] < +\infty$. On vérifie aussi facilement, par le théorème de convergence monotone que μ est σ-additive. C'est donc bien une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.
2. Si $A \in \mathcal{G}$ et $\mathbb{P}(A) = 0$, alors $\mu(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X\mathbf{1}_A] = 0$, car on intègre sur un événement de probabilité nulle. Ainsi $\mu << \mathbb{P}_{|\mathcal{G}}$.
3. Les hypothèses du théorèmes de Radon-Nikodym sont réunies ($\mathbb{P}_{|\mathcal{G}}$, μ sont des mesures σ-finies car finies et $\mu << \mathbb{P}_{|\mathcal{G}}$) donc il existe une variable aléatoire $Z = \dfrac{d\mu}{d\mathbb{P}_{|\mathcal{G}}}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ telle que
$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mu(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[Z 1_A\right].$$
On a donc bien, au vu de la définition de μ, qu'il existe une variable aléatoire Z $\mathcal{G}$-mesurable telle que pour tout $A \in \mathcal{G}$,
$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X 1_A\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[Z 1_A\right].$$

Correction exercice 2 :

1. Soit $A \in \mathcal{G}$. On a, par linéarité de l'espérance que
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(aX+bY)\mathbf{1}_A\right] &= a\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_A\right] + b\mathbb{E}\left[Y\mathbf{1}_A\right]\\ &= a\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \mathcal{G}\right]\mathbf{1}_A\right] + b\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \,\middle|\, \mathcal{G}\right]\mathbf{1}_A\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\left(a\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \mathcal{G}\right] + b\mathbb{E}\left[Y \,\middle|\, \mathcal{G}\right]\right)\mathbf{1}_A\right]\end{aligned}$$
On en déduit par définition de l'espérance conditionnelle que
$$\mathbb{E}\left[aX+bY \,\middle|\, \mathcal{G}\right] = a\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \mathcal{G}\right] + b\mathbb{E}\left[Y \,\middle|\, \mathcal{G}\right]$$
2. Voir le cours pour les autres questions

Correction exercice 3 : Les deux premières questions ont été vues en TD. Voyons comment faire si le vecteur Gaussien n'est pas centré.
(a) On peut directement appliquer le résultat de la question 1 pour en déduire que $X' - X'_\perp$ est indépendant de $(Y'_1, ..., Y'_n)$ donc également indépendant de toute fonction des $(Y'_1, ..., Y'_n)$. Comme $(Y_1, ..., Y_n) = (Y'_1 + \mathbb{E}[Y_1], ..., Y'_n + \mathbb{E}[Y_n])$ est une fonction de $(Y'_1, ..., Y'_n)$, $X' - X'_\perp$ est aussi indépendant de $(Y_1, ..., Y_n)$.
(b) On en déduit que
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y_1, ..., Y_n\right] &= \mathbb{E}\left[X' + \mathbb{E}[X] \,\middle|\, Y_1, ..., Y_n\right]\\ &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\left[X' \,\middle|\, Y_1, ..., Y_n\right]\\ &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\left[X' - X'_\perp \,\middle|\, Y_1, ..., Y_n\right] + \mathbb{E}\left[X'_\perp \,\middle|\, Y_1, ..., Y_n\right]\\ &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\left[X' - X'_\perp\right] + X'_\perp\\ &= \mathbb{E}[X] + X'_\perp.\end{aligned}$$
La quatrième égalité a lieu car $X' - X'_\perp$ est indépendant de $(Y_1, ..., Y_n)$ et car $X'_\perp \in \mathrm{Vect} < Y'_1, ..., Y'_n >$ est une fonction mesurable des $(Y'_1, ..., Y'_n)$ donc des $(Y_1, ..., Y_n)$. Enfin, la dernière égalité car X' et $X'_\perp$ sont centrés.

Correction exercice 4 : La correction de cet exo a été vue en TD. Cependant voyons ce qui se passe lorsque (X, Y, Z) n'est pas centré mais a pour vecteur moyen $(1, 0, -1)'$. D'après la question 3 de l'exercice précédent, il suffit de calculer la projection orthogonale $X'_\perp$ (dans L^2) de $X - 1$ sur $\mathrm{Vect} < Y, Z + 1 >$. Cela revient à trouver des coefficients $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$\begin{aligned}X'_\perp &= \alpha Y + \beta(Z+1)\\ \mathbb{E}\left[(X' - X'_\perp)\, Y\right] &= 0\\ \mathbb{E}\left[(X' - X'_\perp)(Z+1)\right] &= 0\end{aligned}$$

autrement dit :

$$\begin{aligned} X'_\perp &= \alpha Y + \beta(Z+1) \\ \mathbb{E}\left[(X - \alpha Y - \beta Z - (\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\alpha Y + \beta Z]))\,(Y - \mathbb{E}[Y])\right] &= 0 \\ \mathbb{E}\left[(X - \alpha Y - \beta Z - (\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\alpha Y + \beta Z]))\,(Z - \mathbb{E}[Z])\right] &= 0 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} X'_\perp &= \alpha Y + \beta(Z+1) \\ \mathrm{Cov}\,(X - \alpha Y - \beta Z, Y) &= 0 \\ \mathrm{Cov}\,(X - \alpha Y - \beta Z, Z) &= 0 \end{aligned}$$

On retombe sur les mêmes équations pour α, β que dans le cas centré. On obtient donc $(\alpha, \beta) = (1/4, 5/8)$ et donc

$$\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y, Z\right] = 1 + \frac{1}{4}Y + \frac{5}{8}(Z+1).$$

<u>Correction exercice 6</u> :

1. S_n est bien $\mathcal{F}_n$ - mesurable et intégrable comme somme de variables aléatoires $\mathcal{F}_n$ - mesurable et intégrables. De plus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[S_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[S_n + Y_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[S_n \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[Y_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] \\ &= S_n + \mathbb{E}[Y_{n+1}] \\ &= S_n \end{aligned}$$

   car S_n est $\mathcal{F}_n$ - mesurable, car Y_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$ et centré. C'est donc une martingale.

2. S_n^2 est bien $\mathcal{F}_n$ - mesurable et intégrable comme carré de somme de variables aléatoires $\mathcal{F}_n$ - mesurable et de carré intégrable. De plus, par l'inégalité de Jensen conditionnelle,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] &\geq \mathbb{E}\left[S_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right]^2 \\ &= S_n^2. \end{aligned}$$

   ce qui fait de S_n^2 une sous-martingale. Maintenant,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[(S_n + Y_{n+1})^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[S_n^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] + 2\mathbb{E}\left[S_n Y_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[Y_{n+1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] \\ &= S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}\left[Y_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}[Y_{n+1}^2] \\ &= S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}\left[Y_{n+1}\right] + 1 \\ &= S_n^2 + 1 \end{aligned}$$

   Et donc

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 - (n+1) \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n^2 + 1 - (n+1) = S_n^2 - n.$$

   Donc $S_n^2 - n$ est une martingale.