Éléments de correction du TD n° 4:

Convergence de suites de variables aléatoires

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Correction exercice 3 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} F_{R_n}(x) &:= \mathbb{P}(R_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\max_(H_1, ..., H_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(H_1 \leq x, ..., H_n \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}(H_1 \leq x)...\mathbb{P}(H_n \leq x) \qquad \text{par indépendance} \\ &= \mathbb{P}(H_1 \leq x)^n \qquad \text{car les } H_i \text{ ont même loi} \\ &= (1-e^{-x})^n \qquad \text{après calcul} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{F_{R_n}(x) = (1-e^{-x})^n \mathbf{1}_{R_+}(x).}$

2. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|\frac{R_n}{\log n} - 1| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{R_n}{\log n} - 1 \geq \varepsilon \bigsqcup \frac{R_n}{\log n} - 1 \leq -\varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{R_n}{\log n} - 1 \geq \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\frac{R_n}{\log n} - 1 \leq -\varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(R_n \geq (1+\varepsilon)\log n\right) + \mathbb{P}\left(R_n \leq (1-\varepsilon)\log n\right) \\ &= 1 - F_{R_n}((1+\varepsilon)\log n) + F_{R_n}((1-\varepsilon)\log n) \\ &= 1 - (1-e^{-(1+\varepsilon)\log n})^n + (1-e^{-(1-\varepsilon)\log n})^n \\ &= 1 - (1-\frac{1}{n^{1+\varepsilon}})^n + (1-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}})^n \\ &= 1 - e^{n\log(1-\frac{1}{n^{1+\varepsilon}})} + e^{n\log(1-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}})} \\ &= 1 - e^{-n^{-\varepsilon}+o(n^{-\varepsilon})} + e^{-n^{\varepsilon}+o(n^{\varepsilon})} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Correction exercice 4 : On se sert de l'égalité suivante vrai pour toute variable aléatoire dans L^2 :

$$\mathbb{E}\left[(X_n - a)^2\right] = (\mathbb{E}[X_n] - a)^2 + \mathrm{Var}(X_n).$$

En effet :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[(X_n - a)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[((X_n - \mathbb{E}[X_n]) + (\mathbb{E}[X_n] - a))^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X_n - \mathbb{E}[X_n])^2 + 2(X_n - \mathbb{E}[X_n])(\mathbb{E}[X_n] - a) + (\mathbb{E}[X_n] - a)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X_n - \mathbb{E}[X_n])^2\right] + 2(\mathbb{E}[X_n] - a)\mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}[X_n]] + \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X_n] - a)^2\right] \\ &= \mathrm{Var}(X_n) + 0 + (\mathbb{E}[X_n] - a)^2 \qquad (\text{car } \mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}[X_n]] = 0). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left(\mathbb{E}\left[(X_n - a)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right) \Longleftrightarrow \left(\mathbb{E}[X_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } \mathrm{Var}(X_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right).$$

Correction exercice 5 :

1. D'après l'exercice 4., il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \text{ et } \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \mathbb{E}[X_1] = p \quad (\text{car les } X_i \text{ ont même loi et } X_1 \sim \mathcal{B}(p))$$

et

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) \qquad (\text{ car les } X_i \text{ sont indépendants})\\
&= \frac{1}{n}\operatorname{Var}(X_1) \quad (\text{car les } X_i \text{ ont même loi})\\
&= \frac{p(1-p)}{n} \quad (\text{car } X_1 \sim \mathcal{B}(p))\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

2. De même,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i.$$

et

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \operatorname{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \quad (\text{par bilinéarité de la covariance})\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) \quad (\text{car } \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = 0 \text{ si } i \neq j)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)\\
&\leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \qquad (\text{car } p(1-p) \leq \frac{1}{4} \text{ pour tout } p \in [0,1])\\
&= \frac{1}{4n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

On en déduit donc, d'après le critère de convergence L^2 de l'exercice 4 que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \text{ converge dans } L^2 \text{ vers une constante } \iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i \text{ converge.}$$

Dans ce cas, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i.$$

<u>Correction exercice 6</u> : De façon similaire à l'exercice précédent question 1, on a que :

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \mathbb{E}[X_1],$$

et

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{\operatorname{Var}(X_1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On en déduit d'après le résultat de l'exercice 4 que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mathbb{E}[X_1].$$

Comme la convergence dans L^2 implique la convergence en probabilité, on en déduit que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1].$$