Éléments de correction de la feuille de TD n° 5:

LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Correction exercice 3 :

1. Vu en TD
2. Vu en TD
3. (a) D'après la question précédente :

$$V_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2.$$

D'après la loi forte des grands nombres,

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}[X_1] = \mu.$$

Donc on en déduit que : $\boxed{(\bar{X}_n, V_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} (\mu, \sigma^2)}$.

(b) De même,

$$V_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathrm{Var}(X_1) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

et

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}[X_1] = \frac{a+b}{2}.$$

Donc, par continuité des fonctions $(x,y) \mapsto x \pm \sqrt{3y}$, on en déduit que :

$$\bar{X}_n \pm \sqrt{3V_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{3\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2}.$$

puis $\boxed{(\bar{X}_n - \sqrt{3V_n}, \bar{X}_n + \sqrt{3V_n}) \xrightarrow{p.s} (a,b)}$.

Correction exercice 4 :

On définit la somme pour les indices impairs

$$S_n^i := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} X_{2i-1}X_{2i}$$

et la somme pour les indices pairs

$$S_n^p := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} X_{2i}X_{2i+1}.$$

On a la décomposition suivante :

$$S_n = S_n^i + S_n^p.$$

La suite $X_1X_2, X_3X_4, ..., X_{2i+1}X_{2i}, ...$ est i.i.d et dans L_1 car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\mathbb{E}[|X_1X_2|] \leq \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[X_2^2] < +\infty$ car les X_i sont de carré intégrable. On en déduit d'après la LFGN que :

$$\frac{1}{\frac{n+1}{2}} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} X_{2i-1}X_{2i} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}[X_1X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_1]^2,$$

par indépendance de X_1 et X_2. Par conséquent,

$$S_n^i = \frac{\frac{n+1}{2}}{n} \times \frac{1}{\frac{n+1}{2}} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} X_{2i-1}X_{2i} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_1]^2.$$

De même, la LFGN nous montre que :

$$S_n^p \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_1]^2,$$

Puis, $\boxed{S_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}[X_1]^2}$.

Correction exercice 5 :

1. La suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bien i.i.d mais n'est pas dans L_1. En effet,

$$\mathbb{E}[|X_1|] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}dx \qquad = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = +\infty,$$

car $\dfrac{x}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable en $+\infty$.

$\boxed{\text{Par conséquent, les hypothèses de la LFGN ne sont pa satisfaites.}}$

2. Notons $\phi_{\bar{X}_n}$ la fonction caractéristique de $\bar{X}_n$.

$$\begin{aligned}
\phi_{\bar{X}_n}(\xi) &= \mathbb{E}\left[e^{i\xi\bar{X}_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\frac{\xi}{n}\sum_{i=1}^n X_i}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{i\frac{\xi}{n}X_i}\right] \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{i\frac{\xi}{n}X_i}\right] && \text{par indépendance des } X_i \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\frac{\xi}{n}X_i}\right]^n && \text{car les } X_i \text{ ont même loi} \\
&= \left(\phi_{X_1}\left(\xi/n\right)\right)^n \\
&= \left(e^{-|\xi/n|}\right)^n \\
&= e^{-|\xi|} \\
&= \phi_{X_1}(\xi).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\bar{X}_n$ a même fonction caractéristique que X_1. Or, la fonction caractéristique caractérise la loi. On en déduit que $\bar{X}_n$ a même loi que X_1 donc suit également un loi de Cauchy.

$\boxed{\text{La loi de } \bar{X}_n \text{ est donc la loi de Cauchy pour tout } n\in\mathbb{N}.}$

3. On en déduit donc que la suite $(\bar{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger ni en proba ni p.s vers 0 car sinon elle convergerait aussi en loi vers 0 ce qui n'est pas le cas.