Éléments de correction de la feuille de TD n° 6:

CONVERGENCE EN LOI

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Correction exercice 2 :

1. Vu en TD
2. (a) En allant voir la correction de l'exercice 3 du TD 4, vous retrouverez que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X_n}(x) = (1-e^{-x})^n \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x).$$

   (b) On en déduit que pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n - \log n \leq x) &= \mathbb{P}(X_n \leq x + \log n) \\
&= F_{X_n}(x+\log n) \\
&= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[-\log n,\infty[}(x) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{e^{-x}} \mathbf{1}_{]-\infty,+\infty[}(x) \\
&= e^{e^{-x}},
\end{aligned}$$

qui est la fonction de répartition de Z suivant la loi de Gumbel. On en déduit que

$$X_n - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} Z.$$

Correction exercice 3 :

1. Vu en TD
2. La densité de X_n suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ est

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(x-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}}.$$

Si (μ_n, σ_n) tend vers (μ, σ) lorsque n tend vers l'infini, et que σ est strictement positif, alors

$$f_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

qui est la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et donc on en conclut que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(\mu, \sigma).$$

Remarque : Si la limite $\sigma = 0$, on peut montrer que X_n converge en loi vers une variable aléatoire constante égale à μ qui est une loi Gaussienne dégénérée mais pour le montrer, on ne peut pas utiliser la convergence des densités car la variable aléatoire constante n'est pas é densité (voir exercice 5).

Correction exercice 4 : Vu en TD

Correction exercice 5 : Il y a plusieurs façon de démontrer de la convergence en loi. On peut utiliser la convergence des fonctions caractéristiques, des fonctions de répartitions ou encore la définition. Par contre, on ne peut appliquer ni le critère des v.a discrètes ni le critère des v.a à densité car dans chacun des cas, la limite n'est pas du même "type" que la suite qui converge vers elle.

1. Utilisons la définition. Soit f une fonction continue et bornée. On a

alors que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(X_n/n)\right] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) \qquad (\text{car } X_n \sim \mathcal{U}(\{1,...,n\}))\\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)dx \qquad (\text{par somme de Riemann})\\
&= \mathbb{E}\left[f(U)\right] \qquad (\text{où } U \sim \mathcal{U}([0,1]))
\end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{U}([0,1]).$$

2. Utilisons la convergence des fonctions caractéristiques. Fixons $\xi \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_n/n}(\xi) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\xi\frac{X_n}{n}\right)\right]\\
&= \varphi_{X_n}\left(\xi/n\right).
\end{aligned}$$

Calculons la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Y suivant une loi géométrique de paramètre p.

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(\xi) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\xi Y\right)\right]\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\xi k}p(1-p)^{k-1}\\
&= pe^{i\xi}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{i\xi}(1-p))^k\\
&= \frac{pe^{i\xi}}{1-(1-p)e^{i\xi}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_n/n}(\xi) &= \frac{p_n e^{i\xi/n}}{1-(1-p_n)e^{i\xi/n}}\\
&= \frac{np_n e^{i\xi/n}}{n\left(1-(1-p_n)e^{i\xi/n}\right)}.
\end{aligned}$$

Comme np_n tend vers θ, le numérateur tend vers θ. Pour le dénominateur, en utilisant le développement limité $p_n = \theta/n + o(1/n)$, on trouve que

$$\begin{aligned}
1-(1-p_n)e^{i\xi/n} &= 1-(1-\theta/n+o(1/n))(1+i\xi/n+o(1/n))\\
&= 1-(1-\theta/n+i\xi/n+o(1/n))\\
&= \theta/n - i\xi/n + o(1/n),
\end{aligned}$$

et donc le dénominateur $n\left(1-(1-p_n)e^{i\xi/n}\right)$ tend vers $\theta - i\xi$. Finalement,

$$\varphi_{X_n/n}(\xi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\theta}{\theta - i\xi} = \varphi_{\mathcal{E}(\theta)}(\xi)$$

Donc par le théorème de Paul Lévy,

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{E}(\theta).$$

3. Utilisons la fonction caractéristique. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_n}(\xi) &= e^{-\frac{1}{2}\sigma_n^2\xi^2}\\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad (\text{car } \sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0)\\
&= \varphi_0(\xi).
\end{aligned}$$

Donc par le théorème de Paul Lévy,

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} 0.$$