TD 1 - VECTEURS ALÉATOIRES

poudevigne@math.univ-lyon1.fr
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1
On considère (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} kx^2 y \text{ si } (x,y) \in [-1,1] \times [0,1], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k.
2. Calculer les densités marginales de X et de Y.
3. Déterminer la fonction de répartition jointe du vecteur (X,Y).
4. Déterminer les fonctions de répartitions marginales de X et de Y.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
6. Calculer $\mathbb{P}\left((x,y) \in [0;1/2]^2\right)$.
7. Combien vaut $\mathbb{P}(X < Y)$?

Exercice 2
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} ae^{-x-y} \text{ si } 0 \leq x \leq y, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit la densité d'un couple de variables aléatoires (X,Y).
2. Déterminer la fonction de répartition jointe du vecteur (X,Y).
3. Déterminer les densités et fonctions de répartition marginales.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.

Exercice 3
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x,y) = \lambda e^{-\left(\frac{y^2}{2} - xy + x^2\right)}.$$

1. Déterminer λ, la loi de X et la loi de Y.
2. Donner la fonction caractéristique de (X,Y).
3. Calculer $Cov(X,Y)$ et étudier l'indépendance de X et de Y.

Exercice 4
Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer la matrice de covariance de (X,Y).
2. On considère le vecteur aléatoire $(U,V) = (X+2Y, 3X-Y)$. Déterminer la matrice de covariance de (U,V).

Exercice 5
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x \leq y\}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x,y) = e^{-y}\mathbb{1}_D(x,y)$$

1. Vérifier que f est la densité d'un couple (X,Y) de variables aléatoires.
2. Quelles sont les densités marginales de X et de Y ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Les variables X et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?
5. Les variables $X + Y$ et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?
6. Les variables Y et $\dfrac{X}{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 6
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). On pose $U = X+Y$ et $V = \dfrac{X}{X+Y}$.

1. Déterminer les lois de U et de V.
2. U et V sont-elles indépendantes ? Donner la matrice de covariance du couple (U, V).

Exercice 7
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires. On suppose que les trois couples (X, Y), (Y, Z) et (X, Z) ont le même coefficient de corrélation ρ. Montrer que l'on a

$$\rho \geq -\frac{1}{2}.$$

Indication : On pourra, dans un premier temps, supposer que les v.a. X, Y et Z ont même variance.

Exercice 8
Soit X et Y deux variables aléatoires.

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\left[(Y-a)^2\right]$ est minimum.
2. Montrer que
$$\phi(a,b) = \mathbb{E}\left[(Y-(aX+b))^2\right]$$
admet un unique minimum en $a = \dfrac{\rho_{X,Y}\sigma_Y}{\sigma_X}$, $b = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\dfrac{\rho_{X,Y}\sigma_Y}{\sigma_X}$
3. Soit maintenant $Y, X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de $L^2(\mathbb{P})$. Déterminer $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ qui minimisent
$$\mathbb{E}\left[(Y-(a_1X_1+...+a_nX_n+b))^2\right]$$

Exercice 9
Soit $X_1, ...X_n, Y, Z$ des variables de L^2.
On appelle coefficient de corrélation partiel de Y et Z contre $X_1, ..., X_n$ le coefficient de corrélation linéaire des variables Y et Z privées de leurs régressions linéaires (notées $\tilde{Y}$ et $\tilde{Z}$) par rapport à $(X_1, ..., X_n)$.
Montrer que ce coefficient est égal à :

$$\alpha \frac{\mathbb{V}\left[Z-\tilde{Z}\right]^{\frac{1}{2}}}{\mathbb{V}\left[Y-\tilde{Y}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

où α désigne le coefficient de corrélation linéaire de Y par rapport aux variables $X_1, ..., X_n, Z$.