TD 3 - Vecteurs Gaussiens I

lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1
Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Quelles sont les valeurs de ρ pour lesquelles Σ est bien une matrice de covariance ?
   (b) Quelles sont les valeurs de ρ pour lesquelles (X_1, X_2) est non dégénéré ?
2. Quelle est la fonction caractéristique de (X_1, X_2) ?
3. (a) Montrer que $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$ est aussi un vecteur gaussien.
   (b) Quelle est sa matrice de covariance ?
   (c) En déduire que $X_1 - X_2$ et $X_1 + X_2$ sont indépendants.
   (d) quelles sont les fonctions caractéristiques de $X_1 - X_2$,$X_1 + X_2$ et du vecteur $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$?
4. Soit Y_1, Y_2 deux variables aléatoires gaussiennes dont la matrice de covariance est Σ. Les variables aléatoires $Y_1 - Y_2$ et $Y_1 + Y_2$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2
Soit $X := (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Σ.

1. (a) Montrer que pour toute matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, MX est aussi un vecteur gaussien.
   (b) Quelle est sa matrice de covariance ?
2. On suppose que X est non-dégénéré. Montrer qu'il existe $Y := (Y_1, \ldots, Y_n)$, un vecteur gaussien de matrice de covariance I_n, et une matrice A telle que $X = AY$ (Rappel : une matrice symétrique semi-définie positive est le carrée d'une autre matrice symétrique semi-définie positive).

Exercice 3 (Un exercice de l'examen de 2016)
On considère la matrice

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que cette matrice est une matrice de covariance.
2. On considère X un vecteur gaussien de matrice de covariance Σ. Est-ce que X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$? Si oui, donner l'expression de cette densité en fonction de la moyenne $m = (m_1, m_2, m_3)$ de X.
3. Déterminer une matrice 3×3 inversible A telle que les composantes du vecteur AX soient indépendantes.
4. Dans le cas où le vecteur $X = (X_1, X_2, X_3)$ est centré, déterminer la loi de $X_1 + 2X_2 - X_3$

Exercice 4
On rappelle le théorème de Cochran :

Theorem 1
Soit X un vecteur gaussien dans $\mathbf{R}^n$, d'espérance nulle et de matrice de covariance $\sigma^2 I_n$. On définit

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum X_i \text{ et } \overline{V}_n := \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\right).$$

Autrement dit, $\overline{X}_n$ est la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, et $\overline{V}_n$ sa variance empirique. Alors on a :

1. $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/n)$.
2. $(n/\sigma^2)\overline{V}_n \sim \chi^2_{n-1}$.
3. $\overline{X}_n$ et $\overline{V}_n$ sont indépendantes.
4. $\dfrac{\overline{X}_n}{\sqrt{\overline{V}_n/(n-1)}} \sim T_{n-1}$.

Le but de cet exercice est de montrer ce théorème.

1. Montrer qu'il suffit de traiter le cas $\sigma^2 = 1$. On supposera que $\sigma^2 = 1$ dans la suite.
2. Montrer la première proposition du théorème.
3. Montrer que $\overline{V}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$.
4. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors $AX \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ si et seulement si $A \in \mathcal{O}_n(R)$.
5. On admet que pour tout vecteur $u \in \mathbf{R}^n$ tel que $||u_i||_2 = 1$ il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ dont la dernière ligne est u ($M_{n,i} = u_i$). Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telle que si on pose $Y = MX$ alors $Y_n = \sqrt{n}\ \overline{X}_n$. Quelle est la loi de Y ?
6. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2.$$
7. Démontrer le théorème de Cochran.