Feuille de TD n° 10:

Espérance conditionnelle, suite

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Définition 1 (Définition de l'espérance conditionnelle) *Soit X une v.a réelle intégrable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une sous-tribu. On définit* l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, *notée $\mathbb{E}\left[X \middle| \mathcal{G}\right]$, comme l'unique variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable vérifiant que :*

$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \middle| \mathcal{G}\right]\mathbf{1}_A\right].$$

Si Y est une v.a définie sur le même espace et est à valeur dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, on définit :

$$\mathbb{E}\left[X \middle| Y\right] := \mathbb{E}\left[X \middle| \sigma(Y)\right],$$

où $\sigma(Y) := \{Y^{-1}(A),\ A \in \mathcal{E}\} \subseteq \mathcal{F}$ est la tribu engendrée par Y.

Exercice 1 : (*)Existence et Théorème de Radon-Nikodym

Soit X une v.a réelle intégrable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une sous-tribu. Quitte à décomposer $X = X_+ - X_-$ comme la différence de deux variables aléatoires positives, on peut supposer que X est positive. On définit la mesure de probabilité μ :

$$\mu : \begin{cases} \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+ \\ A \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X1_A\right]. \end{cases}$$

1. Montrer que μ définit bien une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.
2. Montrer que $\mu << \mathbb{P}_{|\mathcal{G}}$ où $\mathbb{P}_{|\mathcal{G}}$ est la restriction de $\mathbb{P}$ à $\mathcal{G}$.
3. En déduire, par le théorème de Radon-Nikodym, qu'il existe une variable aléatoire $Z = \dfrac{d\mu}{d\mathbb{P}_{|\mathcal{G}}}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X1_A\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[Z1_A\right].$$

Exercice 2 : (*)Propriétés fondamentales

Soit X et Y deux v.a réelles intégrables sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une sous-tribu. On rappelle les proposition fondamentales suivantes :

1. Linéarité : Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\left[aX + bY \middle| \mathcal{G}\right] = a\,\mathbb{E}\left[X \middle| \mathcal{G}\right] + b\,\mathbb{E}\left[Y \middle| \mathcal{G}\right]$$
.
2. Si XY est intégrable et X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors
$$\mathbb{E}\left[XY \middle| \mathcal{G}\right] = X\mathbb{E}\left[Y \middle| \mathcal{G}\right]$$
3. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors
$$\mathbb{E}\left[X \middle| \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$$
4. Espérances itérées : Si $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$ sont deux sous-tribus, alors
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \middle| \mathcal{G}_1\right] \middle| \mathcal{G}_2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \middle| \mathcal{G}_2\right] \middle| \mathcal{G}_1\right] = \mathbb{E}\left[X \middle| \mathcal{G}_1\right]$$

Montrer les propriétés 1, 3 et 4.

Exercice 3 : Le cas des variables Gaussiennes

Soit $(X, Y_1, ..., Y_n)$ un vecteur Gaussien centré et soit $X_\perp = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i$ la projection orthogonale dans L^2 de X sur Vect $< Y_1, ..., Y_n >$.

1. Montrer que $X - X^\perp$ est indépendant de $(Y_1, ..., Y_n)$.

2. En déduire que :
$$\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y_1, ..., Y_n\right] = X_\perp.$$

3. On suppose maintenant que $(X, Y_1, ..., Y_n)$ est un vecteur Gaussien non centré. On commence par centrer le vecteur en posant $(X', Y_1', ..., Y_n') = (X - \mathbb{E}[X], Y_1 - \mathbb{E}[Y_1], ..., Y_n - \mathbb{E}[Y_n])$. Soit $X'_\perp$ la projection orthogonale dans L^2 de X' sur Vect $< Y_1', ..., Y_n' >$.
   (a) Montrer que $X' - X'_\perp$ est indépendant de $(Y_1', ..., Y_n')$ et donc et aussi indépendant de $(Y_1, ..., Y_n)$.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y_1, ..., Y_n\right] = \mathbb{E}[X] + X'_\perp$.

Exercice 4 : Exemple de conditionnement Gaussien

Soit (X, Y, Z) un vecteur Gaussien centré de matrice de covariance :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y, Z\right]$. Même question si (X, Y, Z) a pour vecteur moyen $(1, 0, -1)'$?

Exercice 5 : Conditionnement par rapport à un vecteur aléatoire

Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et que la densité de Y sachant que $X = x$ est la fonction qui à $y \in \mathbb{R}$ associe :
$$(y - x)e^{-(y-x)} 1_{\{y>x\}} .$$
Enfin, on suppose que la densité de Z sachant que $X = x$ et $Y = y$ est la fonction qui à $z \in \mathbb{R}$ associe :
$$(y - x)e^{-z(y-x)} 1_{\{z>0\}} ,$$
pour tous x, y, z tels que $x \in [0, 1]$ et $y > x$.

1. Quelle est la densité de (X, Y) ? Et celle de (X, Y, Z) ? Et celle de Z ?
2. Quelle est la densité conditionnelle de (X, Y) sachant Z ?
3. On pose $U = Y - X$ et $V = Z(Y - X)$. Quelle est la densité de (X, U, V) ?
4. Que pouvez-vous dire du lien entre les variables X, U et V ?

Exercice 6 : Martingale et marche aléatoire simple

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telle que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui signifie $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$. Soit la *Marche Aléatoire Simple* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale.
2. Montrer que S_n^2 est une sous-martingale et que $S_n^2 - n$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(e^{\lambda S_n - n \log(\cosh \lambda)})_{n\in N}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

<u>Exercice 7</u> : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On définit le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Y_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$. Montrez que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.