Feuille de TD n° 5:

Loi forte des grands nombres

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1 : Méthode de Monte-Carlo

Soit f une fonction dans $L^1([0,1]^d)$, et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]^d$.

1. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \int_{[0,1]^d} f(x_1,...,x_d)dx_1...dx_d.$$

2. Application : approximation du nombre π.
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]^2$. On note $U_n = (X_n, Y_n)$. Montrer que

$$\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i^2+Y_i^2\leq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \pi.$$

Exercice 2 : Convergence de la fonction de répartition empirique

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On note F la fonction de répartition de la loi des X_n. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i\leq x}.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} F(x).$$

Remarque : Le théorème de Glivenko-Cantelli donne un résultat plus fort : presque sûrement, F_n converge uniformément (en x) vers F.

Exercice 3 : Estimation de paramètres par la méthode des moments

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. On note $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne empirique

1. Montrer que si les X_i ont un moment d'ordre k, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}[X_1^k].$$

2. En déduire que si les X_i sont de carré intégrable, alors la variance empirique

$$V_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

converge presque sûrement vers une limite que l'on précisera.

3. Application :
   (a) On suppose que les X_i sont de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ où μ et σ sont des paramètres inconnus que l'on cherche à estimer. Montrer que

$$(\bar{X}_n, V_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} (\mu, \sigma^2).$$

   On dit que ces estimateurs sont consistants.

   (b) On suppose maintenant que les X_i sont de loi uniforme sur $[a,b]$ où a et b sont des paramètres inconnus que l'on chercher à estimer. Monter que

$$(\bar{X}_n - \sqrt{3V_n}, \bar{X}_n + \sqrt{3V_n}) \xrightarrow{p.s} (a,b).$$

<u>Exercice 4</u> : Loi des grands nombres pour des produits

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendants de même loi et de carré intégrable. Étudier la convergence presque sûre de la suite :

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i X_{i+1}}{n}.$$

Indication : on pourra séparer la somme en deux selon la parité de i

<u>Exercice 5</u> : Contre-exemple en l'absence de moment d'ordre 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a i.i.d suivant une loi de Cauchy centrée de paramètre 1, i.e de densité $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. On note $\bar{X}_n$ la moyenne empirique.

1. Les hypothèses de la loi forte des grands nombres sont-elles satisfaites ?
2. On admet que la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy centrée de paramètre 1 vaut $\phi(\xi) = e^{-|\xi|}$. En déduire la loi de $\bar{X}_n$ pour tout n.
3. Conclure que la suite des $\bar{X}_n$ ne converge ni en probabilité ni presque sûrement vers 0 bien que les X_i soient indépendants et centrés.