

On rappelle le Théorème de Slutsky :

**Théorème 1 (Slutsky)** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de vecteurs aléatoires. Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers un vecteur aléatoire  $X$  et que  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers une constante  $c$ . Alors  $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $(X, c)$ .

En particulier,  $X_n + Y_n$  converge en loi vers  $X + c$ , et  $X_n Y_n$  converge en loi vers  $cX$ .

**Exercice 1 : Marche aléatoire et mouvement Brownien**

Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a i.i.d de carré intégrable, centrée et de variance 1. On définit la marche aléatoire suivante :  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ , pour tout  $n \geq 1$ .

1. Vers quelle loi converge  $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ?

2. Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on définit la variable aléatoire  $B_t^n := \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}$ .  
 Vers quelle loi converge  $(B_t^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ? (on pourra utiliser le Théorème de Slutsky)

Remarque : Le théorème de Donsker montre que la suite de fonction aléatoire  $(t \mapsto B_t^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers le mouvement Brownien.

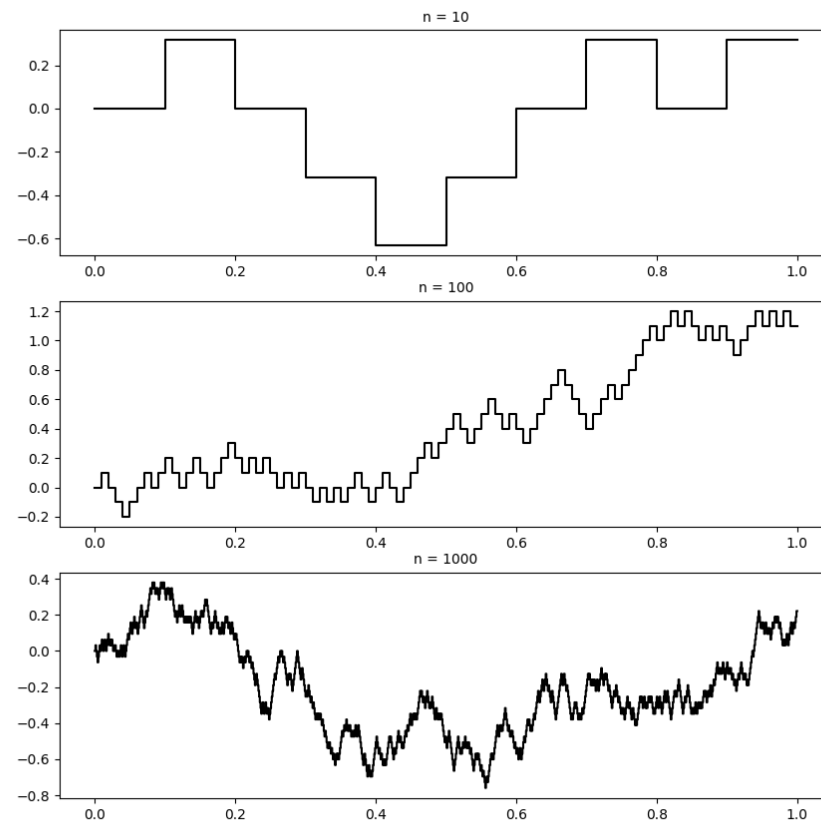


FIGURE 1 – Convergence de la marche aléatoire renormalisée vers le mouvement Brownien. On simule  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  puis on trace les fonctions  $t \mapsto \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}$  pour différentes valeurs de  $n$ .

### Exercice 2 : Intervalle de confiance pour une pièce de monnaie.

On possède une pièce de monnaie qui a une probabilité inconnue  $p$  de tomber sur face. On aimerait déterminer un intervalle de confiance pour  $p$ . Pour cela, on demande à des volontaires de la lancer  $n = 100$  fois de façon indépendante et de noter le nombre de fois  $S_n$  où une face a été observée

1. On note  $p$  la probabilité que la pièce tombe sur face. Quelle est la loi de  $S_n$  ?

2. Par quelle loi peut-on approcher  $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  ?

3. Les tables de statistique de la loi normale nous donne que  $\int_{-1.96}^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \simeq 0.95$ . Montrer que  $\mathbb{P}\left(p \in \left[\frac{S_n}{n} - \frac{1.96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{1.96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) \simeq 0.95$ .

4. En utilisant l'inégalité  $p(1-p) \leq 1/4$ , valable pour tout  $p \in [0, 1]$ , en déduire l'intervalle de confiance à 95% :

$$\mathbb{P}\left(p \in \left[\frac{S_n}{n} - \frac{1.96}{2\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{1.96}{2\sqrt{n}}\right]\right) \gtrsim 0.95.$$

5. Application numérique : On a lancé 100 fois la pièce et observé 41 faces. Déterminer un intervalle de confiance à 95% pour  $p$ . Est-il déraisonnable de dire que la pièce est équilibrée ?

### Exercice 3 : Théorème central limite vectoriel.

Le but est de montrer le TCL vectoriel à partir du TCL unidimensionnel :

**Théorème 2 (TCL vectoriel)** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a dans  $\mathbb{R}^d$  i.i.d de carré intégrable. On pose  $\mu$  le vecteur moyen et  $\Gamma$  la matrice de covariance. Alors

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, \Gamma).$$

1. En utilisant le théorème de Paul Lévy, montrer qu'une suite de vecteur aléatoire  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers un vecteur aléatoire  $Z$  si et seulement si pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ ,  $\langle Z_n, \lambda \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{loi} \langle Z, \lambda \rangle$ .
2. Soit  $Z \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . Quelle est la loi de  $\langle Z, \lambda \rangle$  ?
3. Appliquer le TCL à la suite de v.a unidimensionnelle  $(\langle X_i, \lambda \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$  puis conclure.

### Exercice 4 : Application du TCL vectoriel : loi multinomiale.

On considère un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. A priori, on ne sait pas si le dé est équilibré. Pour  $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ , on note  $p_k$  la probabilité de faire  $k$  en lançant le dé. On lance  $n$  fois le dé de façon indépendante et on note  $D_i$  le résultat affiché par le dé au  $i^{\text{ème}}$  lancer et  $X_i^k = \mathbf{1}_{\{D_i=k\}}$ . On note

également le nombre de fois où le dé est tombé sur la face  $k$  :  $S_n^k = \sum_{i=1}^n X_i^k$ .

1. Quel est le vecteur moyen et la matrice de covariance du vecteur aléatoire  $(X_i^1, X_i^2, X_i^3, X_i^4, X_i^5, X_i^6)$  ?
2. Montrer que  $\frac{1}{\sqrt{n}}((S_n^1, S_n^2, S_n^3, S_n^4, S_n^5, S_n^6) - n(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6))$  converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.