ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

Éléments de correction TD n° 3

Mouvement Brownien (suite) et Intégrale de Wiener

Exercice 1 : Temps d'atteinte du mouvement Brownien.

Soit $a > 0$, $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien et soit $T_a := \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte du point a par un mouvement Brownien.

1. En utilisant une des martingales du mouvement Brownien , calculez sa transformée de Laplace :
$$\mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\right]$$
pour tout $\lambda > 0$.
2. En déduire que $\mathbb{P}\left(T_a < +\infty\right) = 1$ et que $\mathbb{E}\left[T_a\right] = +\infty$.

Correction exercice 1 :

1. On utilise le fait que pour tout $\lambda > 0$, le processus stochastique $\left(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.
Par ailleurs, T_a est un temps d'arrêt car $\{T_a \geq t\} = \{\sup\{B_s,\ s \in [0,t]\} \geq a\} \in \mathcal{F}_t$.
On peut donc appliquer le **théorème d'arrêt** aux temps d'arrêts bornés $0 \leq t \wedge T_a$.
On obtient l'égalité :
$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a} \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] = 1,$$
puis en prenant l'espérance
$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a}\right] = 1.$$
Nous voulons maintenant réaliser la limite $t \to +\infty$. Pour cela, on va utiliser le **théorème de convergence dominée**. D'une part, on a la convergence presque sûre :
$$\begin{aligned} e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a} &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{T_a<+\infty} e^{\lambda B_{T_a} - \frac{\lambda^2}{2}T_a} \\ &= \mathbf{1}_{T_a<+\infty} e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}T_a} \qquad \text{(car } B_{T_a} = a \text{ par continuité du mouvement Brownien).} \end{aligned}$$
D'autre part, on a la domination suivante :
$$e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a} \leq e^{\lambda a}, \qquad (\text{car } B_{t\wedge T_a} \leq a)$$

qui est bien intégrable comme variable aléatoire constante. On en déduit par le théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_{t\wedge T_a}-\frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a}\right] &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<+\infty}e^{\lambda a-\frac{\lambda^2}{2}T_a}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\lambda a-\frac{\lambda^2}{2}T_a}\right].\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda a-\frac{\lambda^2}{2}T_a}\right] = 1,$$

puis

$$\mathbb{E}\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2}T_a}\right] = e^{-\lambda a}.$$

Posons, $\lambda' = \frac{\lambda^2}{2}$, on obtient $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda' T_a}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda'}a}$. On a montré que :

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ \mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda}a}.}$$

2. On a que $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<\infty}e^{-\lambda T_a}\right]$. De plus,

$$\mathbf{1}_{T_a<\infty}e^{-\lambda T_a} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{T_a<\infty},$$

et on a la domination $\mathbf{1}_{T_a<\infty}e^{-\lambda T_a} \leq 1$ donc par le **théorème de convergence dominée**,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<\infty}e^{-\lambda T_a}\right] \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<\infty}\right] = \mathbb{P}\left[T_a<\infty\right].$$

D'où,

$$\boxed{\mathbb{P}\left[T_a<\infty\right] = \lim_{\lambda\to 0} e^{-\sqrt{2\lambda}a} = 1.}$$

Ensuite, pour tout $\lambda > 0$, on a par le **théorème de dérivation sous l'intégrale** que :

$$\frac{d\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right]}{d\lambda} = \mathbb{E}\left[-T_a e^{-\lambda T_a}\right].$$

Or, par théorème de convergence monotone :

$$\mathbb{E}\left[T_a\right] = \lim_{\lambda\to 0}\mathbb{E}\left[T_a e^{-\lambda T_a}\right].$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[T_a\right] &= \lim_{\lambda\to 0}\mathbb{E}\left[T_a e^{-\lambda T_a}\right] \\ &= \lim_{\lambda\to 0} -\frac{d\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right]}{d\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0} -\frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\sqrt{2\lambda}a}\right) \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{a}{\sqrt{2\lambda}}e^{-\sqrt{2\lambda}a} \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}[T_a] = +\infty.}$$

Exercice 2 : Principe de Réflexion et loi du Maximum.

Soit B un mouvement Brownien. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s$ le maximum du mouvement Brownien sur l'intervalle $[0,t]$. Le but de cet exercice est d'utiliser un principe dit "de réflexion" (illustration Figure 1) pour calculer la loi de S_t.

1. On note $T_a := \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte de a par le mouvement Brownien. On note $B_s^a = B_{s+T_a} - B_{T_a}$. Que pouvez-vous dire du processus $(B_s^a)_{s\in\mathbb{R}_+}$?
2. Montrez que $\mathbb{P}[S_t \geq a,\ B_t \leq b] = \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\ B_{t-T_a}^a \leq b-a\right]$.
3. En déduire que $\mathbb{P}[S_t \geq a,\ B_t \leq b] = \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\ B_{t-T_a}^a \geq a-b\right]$.
4. En déduire que $\mathbb{P}[S_t \geq a,\ B_t \leq b] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a-b]$ (voir illustration Figure 1) .
5. En conclure que $\mathbb{P}[S_t \geq a] = 2\,\mathbb{P}[B_t \geq a] = \mathbb{P}[|B_t| \geq a]$ et donc que

$$S_t \overset{d}{=} |B_t|\,.$$

Correction exercice 2 : (Proposée par Hugo Vaneuville)
On fixe t, a, b comme dans l'énoncé.

1. D'après la **propriété de Markov forte**, $(B_s^a)_{s\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$.
2. On a :

$$\begin{aligned}
\{S_t \geq a\} &= \{\exists s \in [0,t],\ B_s \geq a\} \\
&= \{\exists s \in [0,t],\ B_s = a\} \text{ (par le théorème des valeurs intermédiaires)} \\
&= \{T_a \leq t\}\,.
\end{aligned}$$

De plus, sur l'événement $\{T_a \leq t\}$, on a $B_{t-T_a}^a = B_t - B_{T_a} = B_t - a$. Et donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[S_t \geq a,\ B_t \leq b] &= \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\ B_{t-T_a}^a + a \leq b\right] \\
&= \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\ B_{t-T_a}^a \leq b-a\right]\,.
\end{aligned}$$

3. Si on conditionne par $\mathcal{F}_{T_a}$ et qu'on utilise la question 2, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[S_t \geq a,\ B_t \leq b] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a\leq t}\mathbf{1}_{B_{t-T_a}^a \leq b-a} \,\middle|\, \mathcal{F}_{T_a}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a\leq t}\mathbb{P}\left[B_{t-T_a}^a \leq b-a \,\middle|\, \mathcal{F}_{T_a}\right]\right] \text{ (car } T_a \text{ est mesurable par rapport à } \mathcal{F}_{T_a}).
\end{aligned}$$

Comme T_a est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{T_a}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[B^a_{t-T_a} \leq b-a \,\middle|\, \mathcal{F}_{T_a}\right] &= \mathbb{P}\left[B^a_{t-s} \leq b-a \,\middle|\, \mathcal{F}_{T_a}\right]_{|s=T_a} \\
&= \mathbb{P}\left[B^a_{t-s} \leq b-a\right]_{|s=T_a} \quad \text{(car } B^a_{t-s} \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_{T_a}\text{).}
\end{aligned}$$

Or, $(B^a_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien, donc par symmétrie :

$$\mathbb{P}\left[B^a_{t-s} \leq b-a\right] = \mathbb{P}\left[-B^a_{t-s} \leq b-a\right] .$$

En utilisant de nouveau que B^a_{t-s} est indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$ et que T_a est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{T_a}$, on obtient que :

$$\mathbb{P}\left[-B^a_{t-s} \leq b-a\right]_{|s=T_a} = \mathbb{P}\left[-B^a_{t-T_a} \leq b-a \,\middle|\, \mathcal{F}_{T_a}\right] .$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_t \leq b\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a\leq t}\mathbb{P}\left[-B^a_{t-T_a} \leq b-a \,\middle|\, \mathcal{F}_{T_a}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a\leq t}\mathbf{1}_{-B^a_{t-T_a}\leq b-a} \,\middle|\, \mathcal{F}_{T_a}\right]\right] \quad \text{(car } T_a \text{ est mesurable par rapport à } \mathcal{F}_{T_a}\text{)} \\
&= \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\, -B^a_{t-T_a} \leq b-a\right] \\
&= \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\, B^a_{t-T_a} \geq a-b\right] .
\end{aligned}$$

4. On conclut de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_t \leq b\right] &= \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\, B^a_{t-T_a} \geq a-b\right] \\
&= \mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_{t-T_a+T_a} - a \geq a-b\right] \\
&= \mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_t \geq 2a-b\right] .
\end{aligned}$$

Or, comme $a \geq b$, on a $2a-b \geq a$, donc l'événement $\{B_t \geq 2a-b\}$ contient l'événement $\{S_t \geq a\}$, ce qui donne le résultat.

5. En appliquant le résultat précédent avec $b = a$, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[S_t \geq a\right] &= \mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_t \leq a\right] + \mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_t \geq a\right] \\
&= \mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_t \geq a\right] + \mathbb{P}\left[S_t \geq a,\, B_t \geq a\right] \qquad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= 2\mathbb{P}\left[B_t \geq a\right] \qquad \text{(car } \{B_t \geq a\} \subseteq \{S_t \geq a\}\text{)} \\
&= \mathbb{P}\left[|B_t| \geq a\right] .
\end{aligned}$$

<u>Exercice 3</u> : Intégrale de Wiener

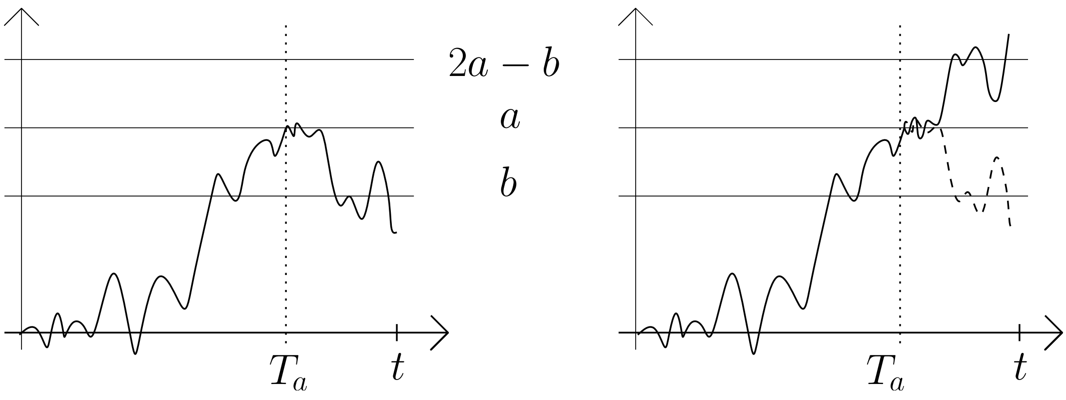

FIGURE 1 – Illustration du principe de réflexion par Hugo Vanneuville. A gauche, un mouvement Brownien satisfaisant l'événement $\{S_t \geq a,\, B_t \leq b\}$. À gauche, le même mouvement Brownien après réflexion pour $s \geq T_a$ et qui vérifie maintenant $B_t \geq 2a - b$. L'idée est que par la propriété de Markov (forte) et par symmétrie, le deuxième processus est aussi un mouvement Brownien.

1. Justifier que la variable aléatoire $X_t = \int_0^t (\sin s)\, dB_s$ est bien définie comme intégrale de Wiener.
2. Justifier que X est un processus gaussien. Calculer son espérance et sa covariance $E(X_s X_t)$.
3. Montrer que le processus X est une martingale.
4. Quelle est la variation quadratique de X ?

<u>Correction exercice 3</u> : Les trois premières questions ont été vues en classe. Voici la correction de la quatrième question. A la question deux, il a été montré que

$$\Gamma(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2}\sin(s \wedge t) - \frac{1}{4}\sin(2s \wedge t).$$

Calculons pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}\left[X_t^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(X_t - X_s + X_s)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] + 2X_s\mathbb{E}\left[X_t - X_s \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] + X_s^2 && \text{(par } F_s\text{-mesurabilité de } X_s) \\
&= \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] + 2X_s \times 0 + X_s^2 && \text{(car } (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \text{ est un PAI)} \\
&= \mathbb{V}(X_t - X_s) + X_s^2 \\
&= \Gamma(t,t) + \Gamma(s,s) - 2\Gamma(s,t) + X_s^2 \\
&= \Gamma(t,t) - \Gamma(s,s) + X_s^2 && \text{(car } \Gamma(s,t) = \Gamma(s \wedge t, s \wedge t) \text{ et } s \leq t)
\end{aligned}$$

On en déduit que $(X_t^2 - \Gamma(t,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale et donc que la variation quadratique de X vaut :

$$\langle X \rangle_t = \Gamma(t,t) = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(2t).$$

<u>Exercice 4</u> : Vers l'intégrale stochastique générale...

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale stochastique $\int_0^t B_s dB_s$, en utilisant la construction vue en cours par approximation par des processus étagés.

1. Montrer que le mouvement Brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un *bon processus*.
2. On définit le processus étagé suivant :

$$B_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1}[}(t)\,,$$

   avec $t_k := \frac{kt}{n}$. Montrer que $B^n \underset{n\to\infty}{\overset{L^2([0,t])}{\longrightarrow}} B$ c'est à dire que : $\mathbb{E}\left[\int_0^t (B_s^n - B_s)^2 ds\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Calculer $\int_0^t B_s^n dB_s$. On pourra exprimer le résultat comme fonction du mouvement Brownien.
4. Montrer enfin que

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t\,.$$

Remarque : On s'assure que B_{t_k} est bien mesurable par rapport à la tribu indexée par la borne gauche de l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[$ à savoir $\mathcal{F}_{t_k}$. Si, par exemple, on remplaçait B_{t_k} par $B_{t_{k+1}}$ qui n'est pas $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable mais $\mathcal{F}_{t_{k+1}}$-mesurable, on obtiendrait un résultat différent (Exercice : le vérifier).

<u>Correction exercice 4</u> :

1. Vu en classe.
2. Vu en classe.
3. Calculons pour tout $n \in \mathbb{N}*$ l'intégrale stochastique $\displaystyle\int_0^t B_s^n dB_s$.

   Par définition de l'intégrale stochastique pour des fonctions en escalier, on a que :

$$\int_0^t B_s^n dB_s := \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

   Ensuite, on écrit que :

$$B_{t_k} = \frac{B_{t_{k+1}} + B_{t_k}}{2} - \frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{2},$$

   pour réécrire la somme sous la forme :

$$\begin{aligned}
\int_0^t B_s^n dB_s &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\frac{(B_{t_{k+1}} + B_{t_k})}{2} - \frac{(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})}{2}\Big)(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(B_{t_{k+1}} + B_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2}{2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2}{2}.
\end{aligned}$$

Par télescopage de la première somme, on obtient l'expression :

$$\int_0^t B_s^n dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2}{2}.$$

4. D'après la question 2, $B^n \underset{n\to\infty}{\overset{L^2([0,t])}{\longrightarrow}} B$ et donc $\int_0^t B_s^n dB_s \underset{n\to\infty}{\overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow}} \int_0^t B_s dB_s$, par définition de l'intégrale stochastique généralisée comme prolongement L^2 de l'intégrale stochastique sur des fonctions en escalier. D'après, le résultat de la question 3, il nous reste à montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \underset{n\to\infty}{\overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow}} t,$$

pour conclure que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$. Autrement dit, il faut montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t\Big)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t\Big)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\big((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t/n\big)\Big)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\big((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t/n\big)\Big)\Big(\sum_{k'=0}^{n-1}\big((B_{t_{k'+1}} - B_{t'_k})^2 - t/n\big)\Big)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0,\, k=k'}^{n-1}\big((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t/n\big)^2\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{k\neq k'}\big((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t/n\big)\big((B_{t_{k'+1}} - B_{t'_k})^2 - t/n\big)\right].
\end{aligned}$$

Commençons par traiter le deuxième terme de la somme. Pour $k \neq k'$, on a que $[t_k, t_{k+1}[$ et $[t'_k, t_{k'+1}[$ sont disjoints donc $(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t/n$ et $(B_{t_{k'+1}} - B_{t'_k})^2 - t/n$ sont indépendantes. par conséquent :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{k\neq k'}\big((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t/n\big)\big((B_{t_{k'+1}} - B_{t'_k})^2 - t/n\big)\right] \\
&= \sum_{k\neq k'} \mathbb{E}\left[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t/n\right] \mathbb{E}\left[(B_{t_{k'+1}} - B_{t'_k})^2 - t/n\right] \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= \sum_{k\neq k'} 0 \times 0 \qquad \left(\text{car } \mathbb{E}\left[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2\right] = \mathbb{V}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) = t/n\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme de la somme, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\big((B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^2-t/n\big)^2\right] &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\big((\sqrt{t/n}Z)^2-t/n\big)^2\right] && \text{(avec } Z\sim\mathcal{N}(0,1))\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[((t/n)(Z^2-1))^2\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(t/n)^2\mathbb{E}\left[((Z^2-1))^2\right]\\
&= \frac{t^2}{n}\mathbb{E}\left[((Z^2-1))^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 && \text{(car } \mathbb{E}\left[((Z^2-1))^2\right]<+\infty).
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que :

$$\mathbb{E}\left[\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^2-t\Big)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc que

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2-\frac{1}{2}t\,.$$