ISFA Vincent Lerouvillois
Soutien Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre printemps 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

Éléments de correction soutien n° 3

L'INTÉGRALE STOCHASTIQUE ET DÉBUT DE LA FORMULE D'ITÔ

<u>Exercice 1</u> : Intégrale de Wiener

1. Justifier que la variable aléatoire $X_t = \int_0^t (\sin s)\, dB_s$ est bien définie comme intégrale de Wiener.
2. Justifier que X est un processus gaussien. Calculer son espérance et sa covariance $E(X_s X_t)$.
3. Montrer que le processus X est une martingale.
4. Quelle est la variation quadratique de X ?

<u>Correction exercice 1</u> :

1. La fonction sin est une fonction déterministe, de carré intégrable sur tout intervalle $[0, t]$. On est donc dans le cadre de définition de l'intégrable de Wiener et X_t est bien définie en tant que tel.
2. D'après le cours, on sait que l'intégrale de Wiener est un processus Gaussien centré et de fonction de covariance donnée par :

$$\begin{aligned}\Gamma(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s, X_t) &= \int_0^{s\wedge t} \sin(u)^2 du \\ &= \int_0^{s\wedge t} \frac{1-\cos(2u)}{2} du \\ &= \frac{s\wedge t}{2} - \left[\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{s\wedge t} \\ &= \frac{1}{2} s\wedge t - \frac{1}{4}\sin(2s\wedge t).\end{aligned}$$

   Calculons pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}\left[X_t^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]$.

3. Il s'agit d'une propriété du cours que nous allons redémontrer : l'intégrale stochastique est une martingale.
   Commençons pas dire que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté où $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\, 0 \leq s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien. Il est de carré intégrable donc intégrable. En effet, $\mathbb{E}\left[X_t^2\right] = \Gamma(t,t) = \frac{2t-\sin(2t)}{4} < \infty$. Il nous reste à montrer la propriété de conservation

de l'espérance conditionnelle. Pour cela, on se sert du fait que l'intégrale de Wiener définit un processus à accroissement indépendants.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[X_t - X_s + X_s \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_t - X_s\right] + X_s \qquad \text{car } X_t - X_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s \text{ et } X_s \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable} \\
&= 0 + X_s.
\end{aligned}$$

4. Il s'agit également d'une propriété du cours : la variation quadratique de l'intégrale stochastique de $I(\theta)$ où θ est une bon processus est

$$\langle I(\theta)\rangle_t = \int_0^t \theta_u^2 du.$$

Redémontrons ce résultat. Soit $s \leq t$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(X_t - X_s + X_s)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] + 2X_s\mathbb{E}\left[X_t - X_s \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] + X_s^2 \qquad (\text{par } F_s\text{-mesurabilité de } X_s) \\
&= \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] + 2X_s \times 0 + X_s^2 \qquad (\text{car } X \text{ est à accroissements indépendants}) \\
&= \mathbb{V}(X_t - X_s) + X_s^2 \\
&= \Gamma(t,t) + \Gamma(s,s) - 2\Gamma(s,t) + X_s^2 \\
&= \Gamma(t,t) - \Gamma(s,s) + X_s^2 \qquad (\text{car } \Gamma(s,t) = \Gamma(s \wedge t, s \wedge t) \text{ et } s \leq t)
\end{aligned}$$

On en déduit que $(X_t^2 - \Gamma(t,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale et donc que la variation quadratique de X vaut :

$$\langle X\rangle_t = \Gamma(t,t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t),$$

qui est bien égal à $\int_0^t \sin(u)^2 du$ d'après le calcul de la question 2.