ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 1

Martingales discrètes et temps d'arrêts

Exercice 1 : Exemples de martingales discrètes autour de marches aléatoires.

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d intégrables et d'espérance $m = \mathbb{E}[Y_1]$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit la *marche aléaoire* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = a \\ S_n = a + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i,\ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)$-adapté.
2. (a) On suppose que $m = 0$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale.

   (b) On suppose maintenant que $m > 0$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-sous-martingale. Donner la *décomposition de Doob-Meyer* de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $S_n = M_n + A_n$, où $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus adapté croissant.
   Indication : On pourra chercher une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $M_n = S_n - \lambda n$ soit une martingale.
3. À partir de maintenant, les Y_n ont pour loi $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. Le processus stochastique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ce cas appelé *Marche Aléatoire Simple* (MAS).

   (a) Montrer que S_n^2 est une $(\mathcal{F}_n)$-sous-martingale et que $S_n^2 - n$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale. Quelle est la décomposition de Doob-Meyer de $(S_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$?

   (b) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \exists \xi \in \mathbb{R}$ tel que $(e^{\lambda S_n - \xi n})_{n\in N}$ soit une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

Exercice 2 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On définit le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Y_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$. Montrez que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

Exercice 3 : Propriétés des temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soient S et T deux temps d'arrêt discrets par rapport à cette filtration.

1. Montrez que $S \wedge T = \min(S, T)$, $S \vee T = \max(S, T)$ et $S + T$ sont aussi des temps d'arrêt.
2. Montrez que, si $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

3. * Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez que la variable $Y_T = \mathbf{1}_{T<\infty}X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Exercice 4 : Temps d'arrêts et marche aléatoire.

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple issue de 0 définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ si $n \geq 1$ où les $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des v.a i.i.d de loi $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dire dans chaque cas si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts.

1. $\tau = \inf\{n \geq 1,\ S_n = 0\}$.
2. $T = \max\{n \in \{0, ..., 4\},\ S_n = 0\}$.

Exercice 5 : Martingale et processus prévisible

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un *processus prévisible* qui signifie, par définition, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout n, H_n est borné et on définit le processus $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $N_0 = 0$ et

$$N_n = \sum_{k=1}^n H_k(M_k - M_{k-1}) \text{ si } n \geq 1\,.$$

1. Montrez que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit T un temps d'arrêt. En appliquant le résultat de la question précédente avec $H_k := \mathbf{1}_{T\geq k}$, en déduire que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, alors il en est de même pour le processus arrêté $(M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : La ruine du joueur.

Deux joueurs, le joueur A possédant initialement a euros et le joueur B en possédant b, jouent au jeu suivant. A chaque coup, les deux joueurs misent un euro et on lance une pièce de monnaie équilibrée. Si le résultat de la pièce est pile, le joueur A remporte la mise et si le résultat de la pièce est face, le joueur B remporte la mise. Le jeu cesse quand l'un des deux est ruiné.

1. En reprenant les notation de l'exercice 1, on note $Y_n = 1$ si le résultat du n^{e} lancer est pile et $Y_n = -1$ si c'est face. Soit S_n l'argent du joueur A au temps n. Soit

   $$T = \inf\{n,\ S_n \in \{0, a+b\}\}.$$

   Justifier que T définit bien un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Quel interprétation donner au temps d'arrêt T et aux évènements $\{S_T = 0\}$ et $\{S_T = a+b\}$?
2. On admet que $T < +\infty$ presque sûrement. En appliquant le théorème d'arrêt à $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la probabilité que A gagne la fortune de B.
3. * Démontrer que $T < +\infty$ presque sûrement.