ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 2

Mouvement Brownien et Martingales Continues

Exercice 1 : Propriétés du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faible),
3. $(B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$ (Retournement temporelle),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité),

Exercice 2 : Un petit contre-exemple.

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Est-ce que le processus $(\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien ?

Exercice 3 : Somme de deux mouvements Browniens indépendants.

Soient W et W^* deux mouvements Browniens indépendants et soit $\rho \in]0,1[$ une constante. Montrez que $(\rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aussi un mouvement Brownien.

Exercice 4 : Martingales du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien issu de 0 et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à B. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et comparer ces résultats avec leurs analogues discrets pour la Marche Aléatoire Simple vus à la question 3. de l'exercice 1 du TD 1.

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
3. $(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le deuxième point revient à dire que le mouvement Brownien a pour variation quadratique $\langle B_t \rangle = t$. Le Théorème de caractérisation de Lévy affirme que la seule martingale continue de variation quadratique t est le mouvement brownien.

Exercice 5 : Le pont Brownien.

Soit B un mouvement Brownien. On considère le processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in [0,1]$ par $X_t = B_t - tB_1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien.
2. Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance.
3. En quel temps t la variance de X_t est-elle maximale ?
4. Est-ce $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale ?

Remarque : Ce processus stochastique s'appelle un Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 au temps 1 (voir Figure 1).

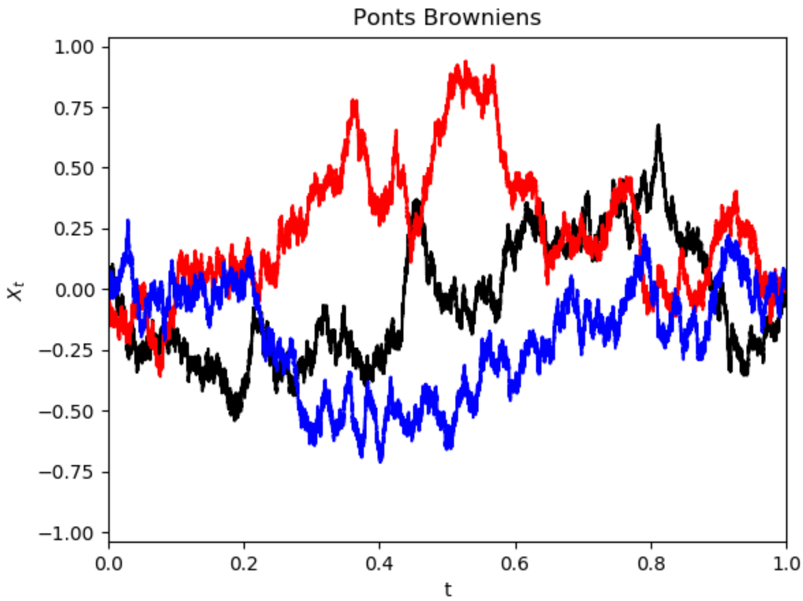

FIGURE 1 – Trois réalisations de ponts Browniens.

Exercice 6 : Des inégalités de Doob.

1. En utilisant le théorème d'arrêt pour les sous-martingales, montrez que si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue et positive, alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :
$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le t} M_s \ge \lambda\right] \le \frac{\mathbb{E}\left[M_t\right]}{\lambda}.$$
2. En déduire que si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :
$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le t} |N_s| \ge \lambda\right] \le \frac{\mathbb{E}\left[N_t^2\right]}{\lambda^2}.$$
Comparer ce résultat avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.