ISFA
Processus stochastiques - M1 Actuariat
Semestre automne 2018-2019

Vincent Lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 4

Intégrale stochastique et crochets des martingales locales continues.

Rappel :
Le tableau suivant résume le cadre de définition de l'intégrale stochastique $I_t(\theta) := \int_0^t \theta_s dB_s$ ainsi que les propriétés du processus associé.

<table>
<tr><td></td><td>Intégrale de Wiener</td><td colspan="2">Intégrale Stochastique généralisée</td></tr>
<tr><td>Cadre de définition</td><td>Fonctions déterministes L^2
$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty$</td><td>Bon processus
$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty$</td><td>Bon processus locaux
$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty$ p.s</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Propriétés de $(I_t(\theta))_{t\in\mathbb{R}_+}$:</td><td colspan="2">Martingale</td><td>Martingale <u>locale</u></td></tr>
<tr><td colspan="3">Variation quadratique : $\langle I(\theta)\rangle_t = \int_0^t \theta_s^2 ds$
Crochets de martingale : $\langle I(\theta), I(\theta')\rangle_t = \int_0^t \theta_s \theta'_s ds$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I(\theta)_t^2 - \langle I(\theta)\rangle_t$ est une martingale</td><td>idem mais que <u>locale</u></td></tr>
<tr><td>Processus Gaussien, centré,
de fonction de covariance :
$\mathbb{E}\left[I_t(\theta)I_s(\theta)\right] = \int_0^{s\wedge t} \theta_u^2 du$.
Processus à accroissements
indépendants.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

On rappel aussi que :

- Si M est une martingale locale telle que $\mathbb{E}\left[\langle M_t\rangle\right] < +\infty$, $\forall t \geq 0$, alors M et $M^2 - \langle M\rangle$ sont des (vraies) martingales
- Si M et N sont deux martingales locales telles que $\mathbb{E}\left[\langle M_t\rangle\right] < +\infty$, $\mathbb{E}\left[\langle N_t\rangle\right] < +\infty$ et $\mathbb{E}\left[\langle M, N\rangle_t\right] < +\infty$, $\forall t \geq 0$, alors $MN - \langle M, N\rangle$ est une (vraie) martingale.

<u>Exercice 1</u> : Intégrale stochastique bien définie en fonction d'un paramètre.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On veut savoir quand l'intégrale stochastique

$$I_{\alpha,t} = \int_0^t \left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{|B_s|}\right)^\alpha dB_s$$

est bien définie et également quand le processus associé est une martingale.

1. Montrer que le processus stochastique $|B|^{-\alpha}$ est un *bon processus si et seulement si* $0 \leq \alpha < 1/2$.
   En déduire que si $0 \leq \alpha < 1/2$, alors $\left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{|B_s|}\right)^{\alpha}_{s\in\mathbb{R}_+}$ est également un *bon processus.*
2. Montrer que pour $1/2 \leq \alpha < 1$, $\left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{|B_s|}\right)^{\alpha}_{s\in\mathbb{R}_+}$ est un *bon processus local.*
   Indication : on pourra utiliser la comparaison du mouvement brownien avec la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ au voisinage de 0, à savoir que $\forall\beta > 1/2$, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{B_t}{t^\beta} = +\infty$ p.s et $\forall\beta < 1/2$, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{B_t}{t^\beta} = 0$ p.s.
3. Dans quels cas, le processus $(I_{\alpha,t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est-il une *martingale* ? Dans quels cas est-ce une *martingale locale* ?

Exercice 2 : Variation quadratique de martingales locales indépendantes.

1. Montrer que si M et N sont deux martingales indépendantes, de carré intégrable, adaptées par rapport à la filtration naturelle produit $\mathcal{F}_t = \sigma\left(M_s, N_s,\ 0 \leq s \leq t\right)$, alors $(M_tN_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale et $\langle M, N\rangle_t = 0$ (on dit que M et N sont orthogonales).
2. Montrer que si M et N sont deux martingales locales indépendantes, adaptées par rapport à $\mathcal{F}_t = \sigma\left(M_s, N_s,\ 0 \leq s \leq t\right)$, alors $(M_tN_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale locale et $\langle M, N\rangle_t = 0$.
3. En déduire la variation quadratique de $\lambda_1 B^1 + \cdots + \lambda_n B^n$ où $B^1, \cdots, B^n$ sont n mouvement Browniens mutuellement indépendants adaptés par rapport à leur filtration naturelle produit et où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Variation quadratique et intégrales stochastiques.

On note $M_t = \int_0^t B_s dB_s$, $N_t = \int_0^t e^{-s} dB_s$ et $V_t = \int_0^t B_s^4 ds$.

1. Pour tout $t \geq 0$, donnez une expression de $\langle M\rangle_t$, $\langle N\rangle_t$, $\langle M, N\rangle_t$ et $\langle M + N, N + V\rangle_t$.
2. Pour tout $t \geq 0$, donnez une expression de $\mathbb{E}\left[M_t^2\right]$, $\mathbb{E}\left[N_t^2\right]$ et $\mathbb{E}\left[M_tN_t\right]$.
3. Écrire $X_t := \int_0^t B_s dM_s + \int_0^t e^{-B_s} d\langle N\rangle_s + \int_0^t B_s^2 dV_s$ comme processus d'Itô.