ISFA | Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat | lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2018-2019 | math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 5

Formule d'Itô et applications.

Exercice 1 : Retour sur $\int_0^t B_s dB_s$.

En appliquant la formule d'Itô à B_t^2, (re)montrez que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)$.

Remarque : C'est quand même bien plus simple avec la formule d'Itô qu'avec le passage à la limite de l'intégrale stochastique des processus étagés non ?

Exercice 2 : Processus d'Itô et martingale.

1. Écrire le processus $\left(\sin(B_t)e^{-t}\right)_{t\geq 0}$ comme processus d'Itô.
2. Montrer que le processus $\left(B_t^3 - 3tB_t\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Exercice 3 : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Pour décrire la dynamique des taux courts, en particulier dans le modèle de Vasicek (1977), on modélise l'évolution du processus de taux par la différentielle stochastique suivante (avec $a, b > 0$) :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

1. Expliquez heuristiquement (en ne vous focalisant que sur l'équation stochastique) pourquoi ce processus a une "force de rappel vers b".
2. En appliquant la formule d'Itô au processus $Y_t = (X_t - b)e^{at}$, déterminer la solution de cette EDS, appelée processus de Ornstein-Uhlenbeck.
3. On suppose que $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. Justifiez que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien dont on précisera la fonction espérance et la fonction de covariance. Préciser la loi de X_t, pour tout $t \geq 0$. Quelle est la limite en loi de X_t lorsque $t \to \infty$?

<u>Exercice 4</u> : Equation de Black et Scholes.

On considère deux actifs : un **actif sans risque** $(S_t^0)_{0\le t\le T}$ de taux de rendement $r > 0$ et un **actif risqué** $(S_t)_{0\le t\le T}$ de taux de rendement $\mu > 0$ et de volatilité $\sigma > 0$. On fait l'hypothèse que le taux d'actif risqué évolue selon la formule de Black-Scholes. Autrement dit :

$$dS_t^0 = S_t^0\, r\, dt\,,$$

et :

$$dS_t = S_t\,(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)\,,$$

où $(W_t)_{t\ge 0}$ est un mouvement Brownien standard. On appelle actif risqué **actualisé** le processus

$$\left(\widetilde{S}_t\right)_{0\le t\le T} := \left(\frac{S_t}{S_t^0}\right)_{0\le t\le T}.$$

Pour simplifier les expressions, on suppose que $S_0^0 = S_0 = 1$.

1. Calculez S_t^0.
2. En appliquant la formule d'Itô à $\ln(S_t)$, montrez que $S_t = \exp\Big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\Big)$.
3. Donnez l'équation stochastique satisfaite par $\widetilde{S}_t$.