ISFA Vincent Lerouvillois
Soutien Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre printemps 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

Séance n° 1

Rappel sur les martingales discrètes et Mouvement Brownien

1 Rappel sur les martingales discrètes.

Exercice 1 : La marche aléatoire simple.

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telle que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit la *Marche Aléatoire Simple* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale.
2. Montrer que $S_n^2 - n$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
3. Montrer que $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \ \exists\xi \in \mathbb{R}$ tel que $(e^{\lambda S_n - \xi n})_{n\in N}$ soit une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
4. Dire dans chaque cas si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts.
   (a) $\tau = \inf\{n \geq 1, \ S_n = 0\}$.
   (b) $T = \max\{n \in \{0, ..., 4\}, \ S_n = 0\}$.

Exercice 2 : Application du théorème d'arrêt : La ruine du joueur.

Deux joueurs, le joueur A possédant initialement a euros et le joueur B en possédant b, jouent au jeu suivant. A chaque coup, les deux joueurs misent un euro et on lance une pièce de monnaie équilibrée. Si le résultat de la pièce est pile, le joueur A remporte la mise et si le résultat de la pièce est face, le joueur B remporte la mise. Le jeu cesse quand l'un des deux est ruiné.

1. En reprenant les notation de l'exercice 1, on note $Y_n = 1$ si le résultat du n^{e} lancer est pile et $Y_n = -1$ si c'est face. Soit S_n l'argent du joueur A au temps n. Soit

$$T = \inf\{n, \ S_n \in \{0, a+b\}\}.$$

   Justifier que T définit bien un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Quel interprétation donner au temps d'arrêt T et aux événements $\{S_T = 0\}$ et $\{S_T = a+b\}$?
2. On admet que $T < +\infty$ presque sûrement. En appliquant le théorème d'arrêt aux temps d'arrêts bornés $0 \leq T \wedge n$, calculer la probabilité que A gagne la fortune de B.

2 Mouvement Brownien.

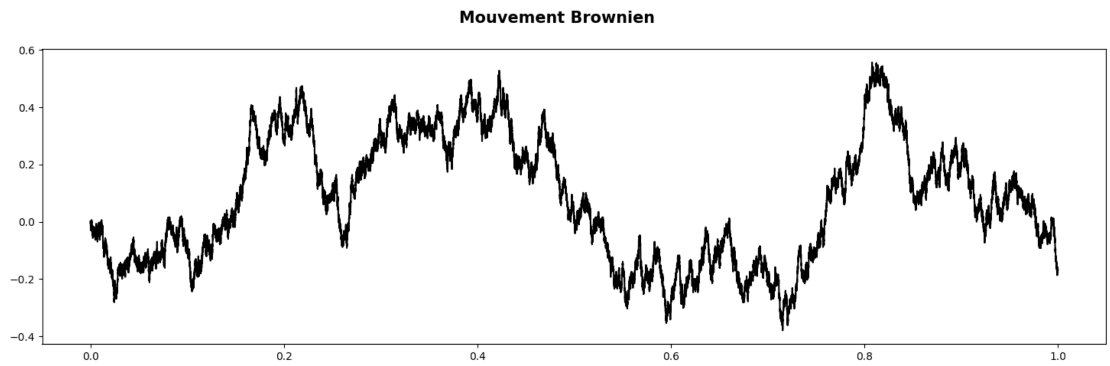

FIGURE 1 – Réalisation d'un mouvement Brownien.

<u>Exercice 3</u> : Propriétés du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faible),
3. $(B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$ (Retournement temporelle),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité),

<u>Exercice 4</u> : Un petit contre-exemple.

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Est-ce que le processus $(\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien ?

<u>Exercice 5</u> : Martingales du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien issu de 0 et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à B. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et comparer ces résultats avec leurs analogues discrets pour la Marche Aléatoire Simple vus à la question 3. de l'exercice 1 du TD 1.

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
3. $(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le deuxième point revient à dire que le mouvement Brownien a pour variation quadratique $\langle B_t \rangle = t$. Le Théorème de caractérisation de Lévy affirme que la seule martingale continue de variation quadratique t est le mouvement brownien.