ISFA Vincent Lerouvillois
Soutien Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre printemps 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

Séance n$^{\text{o}}$ 3

L'intégrale stochastique et début de la Formule d'Itô

---

1 Intégrale stochastique.

Exercice 1 : Un calcul explicite

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale stochastique $\int_0^t B_s dB_s$, en utilisant la construction vue en cours par approximation par des processus étagés.

1. Montrer que le mouvement Brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un *bon processus.*
2. On définit le processus étagé suivant :

$$B_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(t)\,,$$

   avec $t_k := \frac{kt}{n}$. Montrer que $B^n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2([0,t])} B$ c'est à dire que : $\mathbb{E}\left[\int_0^t (B_s^n - B_s)^2 ds\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Calculer $\int_0^t B_s^n dB_s$. On pourra exprimer le résultat comme fonction du mouvement Brownien.
4. Montrer enfin que

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t\,.$$

Remarque : On s'assure que B_{t_k} est bien mesurable par rapport à la tribu indexée par la borne gauche de l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[$ à savoir $\mathcal{F}_{t_k}$. Si, par exemple, on remplaçait B_{t_k} par $B_{t_{k+1}}$ qui n'est pas $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable mais $\mathcal{F}_{t_{k+1}}$-mesurable, on obtiendrait un résultat différent (Exercice : le vérifier).

Exercice 2 : Intégrale de Wiener

1. Justifier que la variable aléatoire $X_t = \int_0^t (\sin s)\, dB_s$ est bien définie comme intégrale de Wiener.
2. Justifier que X est un processus gaussien. Calculer son espérance et sa covariance $E(X_s X_t)$.
3. Montrer que le processus X est une martingale.
4. Quelle est la variation quadratique de X ?

2 Début de la Formule d'Itô

Exercice 3 : Retour sur $\int_0^t B_s dB_s$.

En appliquant la formule d'Itô à B_t^2, (re)montrez que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)$.

Exercice 4 : Processus d'Itô et martingale.

1. Écrire le processus $\left(\sin(B_t)e^{-t}\right)_{t\geq 0}$ comme processus d'Itô.
2. Montrer que le processus $\left(B_t^3 - 3tB_t\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.

3 Tableau bilan sur l'intégrale stochastique et ses propriétés.

Le tableau suivant résume le cadre de définition de l'intégrale stochastique $I_t(\theta) := \int_0^t \theta_s dB_s$ ainsi que les propriétés du processus associé.

<table>
<tr><td></td><td>Intégrale de Wiener</td><td colspan="2">Intégrale Stochastique généralisée</td></tr>
<tr><td>Cadre de définition</td><td>Fonctions déterministes L^2
$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty$</td><td>Bon processus
$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty$</td><td>Bon processus locaux
$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty$ p.s</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Propriétés de $(I_t(\theta))_{t\in\mathbb{R}_+}$:</td><td colspan="2">Martingale</td><td>Martingale locale</td></tr>
<tr><td colspan="3">Variation quadratique : $\langle I(\theta)\rangle_t = \int_0^t \theta_s^2 ds$
Crochets de martingale : $\langle I(\theta), I(\theta')\rangle_t = \int_0^t \theta_s \theta'_s ds$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I(\theta)_t^2 - \langle I(\theta)\rangle_t$ est une martingale</td><td>idem mais que locale</td></tr>
<tr><td>Processus Gaussien, centré,
de fonction de covariance :
$\mathbb{E}\left[I_t(\theta)I_s(\theta)\right] = \int_0^{s\wedge t} \theta_u^2 du.$
Processus à accroissements
indépendants.</td><td></td><td></td></tr>
</table>