**ISFA** Vincent Lerouvillois
Soutien Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre printemps 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

---

**Séance n° 4**

FORMULE D'ITÔ ET APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

---

Les trois premiers exercices sont extraits de l'examen 2019.

# 1 Processus d'Itô et EDS

**Exercice 1 : Processus d'Itô**

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. Ecrire les processus suivants comme processus d'Itô, c'est à dire sous la forme :

$$x_0 + \int_0^t \mu(s, B_s)ds + \int_0^t \sigma(s, B_s)dB_s.$$

1. $X_t = \exp(\frac{t}{2}) \sin(B_t)$
2. $Y_t = B_t^2 \exp(B_t + t)$
3. $Z_t = \exp\left(aB_t - t\frac{a^2}{2}\right), a \in \mathbb{R}$
4. Le(s)quel(s) des processus précédents sont des martingales ? Justifiez votre réponse.

**Exercice 2 : EDS régissant un processus stochastique**

1. Soit $Y_t = X_1(t)X_2(t)$, avec $X_1$ et $X_2$ définis par leurs EDS :

$$dX_1(t) = f(t)dt + \sigma_1(t)dB_t$$

$$dX_2(t) = \sigma_2(t)dB_t$$

Déterminer l'équation différentielle stochastique régissant $Y_t$.

2. Soit $\alpha, \beta$ deux constantes. Soit $Z$ défini par son EDS :

$$dZ_t = -\frac{1}{2}\alpha Z_t dt + \frac{1}{2}\beta dB_t.$$

Soit

$$K_t = Z_t e^{\alpha\frac{t}{2}}.$$

Déterminer l'équation différentielle stochastique régissant $K_t$.

## 2 Résolution d'EDS

**<u>Exercice 3</u> : - Une EDS sur** $[0,1[$

On considère l'équation différentielle stochastique suivante sur l'intervalle de temps $[0,1[$ :

$$\begin{cases} dX_t = -\dfrac{X_t}{1-t}dt + dB_t \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

1. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une solution de l'EDS. Appliquer la formule d'Itô à $Y_t := \frac{X_t}{1-t}$
2. En déduire que l'EDS admet une unique solution et que cette solution vérifie :

$$X_t = (1-t)x_0 + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dB_s$$

3. Montrer que $(X_t)$ est un processus Gaussien. Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance. Préciser la loi de $X_t$ pour tout $t$ dans $[0,1[$.

**<u>Exercice 4</u> : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.**

Pour décrire la dynamique des taux courts, en particulier dans le modèle de Vasicek (1977), on modélise l'évolution du processus de taux par la différentielle stochastique suivante (avec $a, b > 0$) :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

1. En appliquant la formule d'Itô au processus $Y_t = (X_t - b)e^{at}$, déterminer la solution de cette EDS, appelée processus de Ornstein-Uhlenbeck.
2. On suppose que $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. Justifiez que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien dont on précisera la fonction espérance et la fonction de covariance. Préciser la loi de $X_t$, pour tout $t \geq 0$. Quelle est la limite en loi de $X_t$ lorsque $t \to \infty$ ?

**<u>Exercice 5</u> : Equation de Black et Scholes.**

On considère deux actifs : un **actif sans risque** $(S_t^0)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $r > 0$ et un **actif risqué** $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $\mu > 0$ et de volatilité $\sigma > 0$ régis par l'équation de Black-Scholes :

$$dS_t^0 = S_t^0\, r\, dt\,,$$
$$dS_t = S_t\, (\mu\, dt + \sigma\, dW_t)\,,$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard. Pour simplifier les expressions, on suppose que $S_0^0 = S_0 = 1$.

1. Calculez $S_t^0$.
2. En appliquant la formule d'Itô à $\ln(S_t)$, montrez que $S_t = \exp\Big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\Big)$.