ISFA Vincent Lerouvillois
Soutien Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre printemps 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

Séance n° 5
Théorème de Girsanov

Exercice 1 : Probabilité de ruine et mouvement brownien avec dérive

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et adapté par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On modélise l'argent détenu par une personne à un instant t par :

$$X_t = x_0 + \mu t - \sigma B_t,$$

où $x_0 > 0$ est l'argent au temps 0, $\mu > 0$ est le revenu de la personne par unité de temps (dérive), B_t représente un risque et $\sigma > 0$ le paramètre de volatilité. On se demande quelle est la probabilité que cette personne soit ruinée à un moment, en fonction des paramètres x_0, μ et σ. Pour cela, on définit le temps de ruine :

$$T_0 := \inf\{t > 0,\, X_t = 0\}.$$

Le but de l'exercice est de calculer la probabilité de ruine : $\mathbb{P}(T_0 < +\infty)$.

1. Posons $a = \frac{x_0}{\sigma}$ et $c = \frac{\mu}{\sigma}$. On considère le processus

$$\tilde{B}_t := B_t - ct,$$

   et le temps d'atteinte :

$$\tilde{T}_a := \inf\{t > 0,\, \tilde{B}_t = a\}.$$

   Montrer que $T_0 = \tilde{T}_a$.
2. On fixe un horizon de temps $t > 0$. Justifier que $(\tilde{B}_s)_{0\leq s\leq t}$ est un mouvement brownien standard par rapport à une autre mesure de probabilité $\mathbb{Q}_t$ que l'on explicitera en fonction de $\mathbb{P}$, de t et de c.
3. Justifier que $\mathbb{P}(T_0 \leq t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left[\mathbf{1}_{\tilde{T}_a\leq t} e^{-c\tilde{B}_t - \frac{c^2 t}{2}}\right]$.
4. En justifiant que $\tilde{T}_a$ est un temps d'arrêt et que $(e^{-c\tilde{B}_t - \frac{c^2 t}{2}})_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{Q}_t$-martingale, en déduire, par le théorème d'arrêt, que :

$$\mathbb{P}(T_0 \leq t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left[\mathbf{1}_{\tilde{T}_a\leq t} e^{-c\tilde{B}_{t\wedge T_a} - \frac{c^2 t\wedge T_a}{2}}\right] = e^{-ca}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left[\mathbf{1}_{\tilde{T}_a\leq t} e^{-\frac{c^2 T_a}{2}}\right].$$

5. On admet que pour un mouvement Brownien standard, le temps d'atteinte de la valeur a : $\tilde{T}_a$ a pour densité $f_{\tilde{T}_a}(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{a^2}{2x}}}{x^{3/2}} \mathbf{1}_{x>0}$. En conclure que
$$\mathbb{P}(T_0 \leq +\infty) = e^{-ca} \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{a^2}{2x} - \frac{c^2 x}{2}}}{x^{3/2}} dx.$$
En calculant la dernière intégrale, on trouve que
$$\mathbb{P}(T_0 < +\infty) = e^{-2ca} = \exp(-\frac{2x_0\mu}{\sigma^2}).$$

<u>Exercice 2</u> : Probabilité neutre au risque.

On considère deux actifs : un **actif sans risque** $(S_t^0)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $r > 0$ et un **actif risqué** $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $\mu > 0$ et de volatilité $\sigma > 0$. On fait l'hypothèse que le taux d'actif risqué évolue selon la formule de Black-Scholes. Autrement dit :
$$dS_t^0 = S_t^0 \, r \, dt \,,$$
et :
$$dS_t = S_t \, (\mu \, dt + \sigma \, dB_t) \ ,$$
où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard. On appelle actif risqué **actualisé** le processus
$$\left(\widetilde{S}_t\right)_{0\leq t\leq T} := \left(\frac{S_t}{S_t^0}\right)_{0\leq t\leq T} .$$
Pour simplifier les expressions, on suppose que $S_0^0 = S_0 = 1$.

1. Calculez S_t^0.
2. En appliquant la formule d'Itô à $\ln(S_t)$, montrez que $S_t = \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right)$.
3. Donnez l'équation stochastique satisfaite par $\widetilde{S}_t$.
4. On note $\mathbb{P}$ la probabilité sous-jacente (sous-laquelle $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien). Soit $\mathbb{Q}_T$ la probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par
$$d\mathbb{Q}_T = \exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma} B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T\right) d\mathbb{P} \,.$$
Que pouvez-vous dire de $(W_t := B_t - \frac{r-\mu}{\sigma} t)_{0\leq t\leq T}$ sous $\mathbb{Q}_T$?
5. Montrez que $(\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_T$ et écrire $(\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ comme processus d'Itô sous $\mathbb{Q}_T$ (à l'aide de W_t). On appelle $\mathbb{Q}_T$ la **probabilité neutre au risque**.
6. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :
$$F(t,x) = e^{\sigma^2(T-t)} x^2 - 2ax + a^2 \,.$$
   (a) Montrez que $(M_t := F(t, \widetilde{S}_t))_{0\leq t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_T$.
   (b) Calculez $E_{\mathbb{Q}_T}\left[(\widetilde{S}_T - a)^2\right]$.