Éléments de correction TD 4

Tribus et Mesures

Exercice 1.

1. Soit Ω un univers, et A, B des parties de Ω.
   (a) Quelle est la tribu engendrée par A ?
   (b) Quelle est la tribu engendrée par A et B ?

* 2. Soit Ω un univers, et $(A_i)_{i\geq 1}$ des parties de Ω. Quel est le nombre maximal d'éléments que peut avoir la tribu engendrée par $\{A_1, \cdots, A_n\}$?

Correction exercice 1 : Vu en classe.

Exercice 2.
Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces probabilisables, et $f : \Omega \to \Omega'$. Lesquelles des affirmations ci-dessous sont vérifiées ?

a) $\{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ est une tribu sur Ω.

b) $\{f(A), A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur $f(\Omega)$.

c) $\{A' \subset \Omega', f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω'.

Correction exercice 2 : Vu en classe.

Exercice 3.
Soient Ω, Ω' deux ensembles, $f : \Omega \to \Omega'$ une application, et $\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$. Le but de l'exercice est de montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$.

1. Montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$.

2. Soit
$$\mathcal{A}' = \{A' \subset \Omega', f^{-1}(A') \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))\}.$$
Montrer que $\sigma(\mathcal{C}') \subset \mathcal{A}'$, et en déduire que
$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) \subset f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')).$$

3. Conclure.

Correction exercice 3 :

1. D'après l'exercice 2, question a), $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ est un tribu. Or, comme $\mathcal{C}' \subseteq \sigma(\mathcal{C}')$, on a $f^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$. $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ est donc une tribu qui contient $f^{-1}(\mathcal{C}')$. Par définition de la tribu engendrée par une partie, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))$ est la plus petite tribu qui contient $f^{-1}(\mathcal{C}')$ donc

$$\boxed{\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C}')\right) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) .}$$

2. D'après l'exercice 2, question c), $\mathcal{A}'$ est une tribu. De plus, elle contient $\mathcal{C}'$ car pour tout $A' \in \mathcal{C}'$, $f^{-1}(A') \in f^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))$ et donc $A' \in \mathcal{A}'$. Par définition de la tribu engendrée par une partie, on en déduit que

$$\boxed{\sigma(\mathcal{C}') \subseteq \mathcal{A}'.}$$

On en déduit immédiatement que

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) \subseteq f^{-1}(\mathcal{A}') .$$

Par ailleurs, par définition

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \{f^{-1}(A'),\ A' \in \mathcal{A}'\}.$$

Or pour tout $A' \in \mathcal{A}'$, on a que $f^{-1}(A') \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))$ d'où

$$\{f^{-1}(A'),\ A' \in \mathcal{A}'\} \subseteq \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C}')\right) .$$

Finalement,

$$\boxed{f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) \subset f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')).}$$

3. On a donc montré que

$$\boxed{\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')).}$$

Exercice 4.
Par quelles collections d'ensembles la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est-elle engendrée ?

a) Les intervalles $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{Z}$.

b) Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

c) Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$.

d) Les intervalles $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{Q}$.

e) Les singletons $\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Correction exercice 4 : Vu en classe.

Exercice 5.
Déterminer lesquelles des affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. On justifiera chaque réponse avec une preuve ou un contre-exemple.

1. L'intersection de deux tribus est une tribu. L'union de deux tribus est une tribu.
2. Si X est un ensemble fini, $\mathcal{P}(X)$ est la seule tribu qui contient les singletons. Même affirmation pour X dénombrable, puis indénombrable.
3. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est mesurable si et seulement si $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\{x \in \Omega, f(x) > r\} \in \mathcal{A}$.

Correction exercice 5 :

1. On peut en fait montrer qu'une intersection quelconque de tribus est une tribu. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ un ensemble de tribus. Montrons que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu.

   (a) Elle contient $\emptyset$ car $\emptyset$ appartient à chaque tribu donc à l'intersection aussi.

   (b) Elle est stable par complémentaire car si $A \in \mathcal{A}_i$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}_i$ car $\mathcal{A}_i$ est une tribu et donc si $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ alors $\bar{A} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ car $\bar{A}$ appartient à chacun des $\mathcal{A}_i$.

   (c) Elle est stable par union dénombrable car pour tout $i \in I$, si $A_n \in \mathcal{A}_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i$ car $\mathcal{A}_i$ est une tribu. Si maintenant $A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ pour tout n, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ car $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à chacun des $\mathcal{A}_i$.

   Par contre, l'union de deux tribus n'est pas une tribu. Par exemple, si $\Omega = \{0, 1, 2\}$ alors $\sigma(\{0\}) \cup \sigma(\{1\})$ n'est pas un tribu car $\sigma(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$, $\sigma(\{1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ et donc

   $$\sigma(\{0\}) \cup \sigma(\{1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

   qui n'est pas stable par union car ne contient pas $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$.

2. Si X est fini ou dénombrable, alors c'est vrai. En effet, soit $\mathcal{A}$ une tribu qui contient les singletons $\{x\}$ pour tout $x \in X$ et soit $A \in \mathcal{P}(X)$. Par dénombrabilité de X, on a que A est également dénombrable donc peut s'écrire comme l'union dénombrable de ses éléments :

   $$A = \bigcup_{x\in A} \{x\}$$

   et appartient donc à $\mathcal{A}$ par stabilité de $\mathcal{A}$ par union dénombrable. En résumé, toute partie A de X appartient à $\mathcal{A}$ donc

   $\boxed{\text{Si } \mathcal{A} \text{ contient tous les singletons d'un ensemble fini ou dénombrable } X, \text{ alors } \mathcal{A} = \mathcal{P}(X).}$

   C'est faux si X est indénombrable. Par exemple, pour $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu qui contient tous les singletons de $\mathbb{R}$ mais qui est strictement incluse dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

3. C'est vrai aussi. En effet, si f est mesurable, alors $\{x \in \Omega, f(x) > r\} = f^{-1}(]r, +\infty[) \in \mathcal{A}$ par mesurabilité de f et car $]r, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Réciproquement, supposons que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\{x \in \Omega, f(x) > r\} \in \mathcal{A}$. Notons $\mathcal{C}' = \{]r, +\infty[,\ r \in \mathbb{Q}\}$. Par hypothèse, on a $f^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu qui contient $f^{-1}(\mathcal{C}')$, elle contient aussi la tribu engendrée par $f^{-1}(\mathcal{C}')$ soit
$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C}')\right) \subseteq \mathcal{A}.$$
Or, d'après l'exercice 3,
$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C}')\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')).$$
Enfin, d'après le cours,
$$\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
On en déduit que
$$f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C}')\right) \subseteq \mathcal{A},$$
ce qui, par définition, revient à dire que f est mesurable.

Exercice 6. Un ensemble de Cantor.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$C_n = \{x \in [0,1],\ x \text{ n'a que des 0 ou des 9 dans son développement décimal jusqu'à l'ordre } n\},$$

c'est à dire l'ensemble des nombres qui s'écrivent $x = 0, x_1 \cdots x_n \cdots$ avec $(x_1, \cdots x_n) \in \{0, 9\}$. et

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

1. Écrire C_n comme une union d'intervalles disjoints.
2. Calculer $\lambda(C_n)$ pour tout n puis $\lambda(C)$.

Remarque : On peut montrer que l'ensemble C est indénombrable.

<u>**Correction exercice 6**</u> **:** Vu en classe pour un groupe.

Exercice 7.
Dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue notée λ, construire une suite décroissante de boréliens $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \neq \lim_{n \to \infty} \lambda(A_n).$$

Indication : à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a-t-on toujours l'égalité ? Il faut trouver une suite qui ne vérifie pas cette condition.

Correction exercice 7 : Si les A_n sont de mesure fini, alors l'égalité est bien vrai. Il faut donc considérer une suite de A_n décroissantes de mesure infini. Prenons par exemple

$$A_n = [n, +\infty[.$$

On a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ et donc

$$\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0.$$

Par contre,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = +\infty.$$

Exercice 8.

Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, invariante par translation, et telle que $\mu(I_1) = 1$, où on note I_x le segment $]0, x]$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\mu(I_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mu(I_q)$ pour $q \in \mathbb{Q}_+$.
3. Déterminer μ.

Correction exercice 8 : Notons $I_{x,y} =]x, y]$ pour tout réels $x < y$.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mu(I_n) &= \mu\left(\bigsqcup_{k=0}^{n-1} I_{k,k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(I_{k,k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(I_1\right) && \text{par invariance par translation de } \mu \\
&= n.
\end{aligned}$$

2. Maintenant pour tout rationnel $q = m/n$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}
\mu\left(I_q\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{k=0}^{m-1} I_{k/n,(k+1)/n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \mu\left(I_{k/n,(k+1)/n}\right) \\
&= m\mu\left(I_{1/n}\right) && \text{par invariance par translation de } \mu
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}1 = \mu\left(I_1\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{k=0}^{n-1} I_{k/n,(k+1)/n}\right)\\ &= n\mu\left(I_{1/n}\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\mu\left(I_{1/n}\right) = 1/n.$$

Finalement pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$,

$$\mu\left(I_q\right) = m\mu\left(I_{1/n}\right) = m/n = q.$$

3. D'après la question précédente et par invariance par translation, on en déduit que pour tous rationnels $a < b$,
$$\mu(]a, b]) = \mu(]0, b-a]) = b - a,$$
et on peut montrer facilement (par invariance par translation) que $\mu(]-a, b]) = \infty$ si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. La mesure μ coïncide avec la mesure de Lebesgue sur le semi-anneau formé par les intervalles de la forme $]a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ qui engendre la tribu borélienne. Par unicité du prolongement donné par le théorème de Carathéodory, on en déduit finalement que μ est la mesure de Lebesgue.

La mesure de Lebesgue est l'unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ invariante par translation et telle que l'intervalle $]0, 1]$ a mesure 1.

Exercice 9.
On lance un dé à six faces sans s'arrêter. Construire un espace probabilisé représentant cette expérience. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « On n'obtient que des 6. »
- B : « À partir d'un certain rang, on n'obtient que des 6. »
- C : « On obtient au moins un 6. »
- D : « On obtient une infinité de 6. »

Correction exercice 9 : On peut modéliser un lancer de dé par l'espace probabilisé $(\llbracket 1, 6\rrbracket, \mathcal{P}\left(\llbracket 1, 6\rrbracket\right), \mu)$ où μ est la mesure uniforme. Pour modéliser une infinité de lancers de dés, on considère l'espace probabilisé produit (c.f le cours) :

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \left(\llbracket 1, 6\rrbracket^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{P}\left(\llbracket 1, 6\rrbracket\right)^{\otimes\mathbb{N}^*}, \mu^{\otimes\mathbb{N}^*}\right).$$

Notons X_n l'événement "le n ième lancer donne 6" que l'on peut écrire mathématiquement comme

$$X_n = \llbracket 1, 6\rrbracket^{n-1} \times \{6\} \times \llbracket 1, 6\rrbracket^{\mathbb{N}\setminus\llbracket 1, n\rrbracket}.$$

1. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}*} X_n\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{N} X_n\right] && \text{car } \bigcap_{n\in\mathbb{N}*} X_n = \bigcap_{N\in\mathbb{N}*}\left(\bigcap_{n=1}^{N} X_n\right) \text{ et } \left(\bigcap_{n=1}^{N} X_n\right)_{N\in\mathbb{N}*} \text{ est décroissant} \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[\{6\}^N \times [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}\setminus[\![1,N]\!]}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^N && \text{par définition de la mesure produit} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B] &= \mathbb{P}[\liminf X_n] \\
&= \mathbb{P}\left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} X_n\right] \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left[\bigcap_{n\geq k} X_n\right] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=k}^{N} X_n\right] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{N-k+1} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[C] &= 1 - \mathbb{P}[\text{On obtient aucun 6}] \\
&= 1 - \mathbb{P}\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}*} \{1,2,3,4,5\}\right] \\
&= 1 - \mathbb{P}\left[\bigcap_{N\in\mathbb{N}*} \{1,2,3,4,5\}^N \times [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}\setminus[\![1,N]\!]}\right] \\
&= 1 - \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[\{1,2,3,4,5\}^N \times [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}\setminus[\![1,N]\!]}\right] \\
&= 1 - \lim_{N\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^N \\
&= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[D\right] &= \mathbb{P}\left[\limsup X_n\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\bigcap_{k\in\mathbb{N}*}\bigcup_{n\geq k} X_n\right] \\
&= \lim_{k\to\infty}\mathbb{P}\left[\bigcup_{n\geq k} X_n\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} 1-\mathbb{P}\left[\bigcap_{n\geq k}\bar{X_n}\right] \\
&= 1-\lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left[\bigcap_{n=k}^{N}\bar{X_n}\right] \\
&= 1-\lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left[\bar{X_n}\right]^{N-k+1} \\
&= 1-\lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k+1} \\
&= 1-0=1.
\end{aligned}$$