Éléments de correction TD 9

Convolution et fonction caractéristique.

Exercice 1. Covariance en dimension supérieure.
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur aléatoire de matrice de covariance

$$\mathrm{Cov}\,(X, =) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculer $\mathrm{Var}\,(3X_1 - X_2 + 2X_3)$.

Exercice 2. Loi exponentielle.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, où $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\beta)$, avec $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha \neq \beta$.
   (a) Donner la loi de $X + Y$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}\,[X < Y]$.
2. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variable aléatoire i.i.d de loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$:
   (a) en calculant le produit de convolution des probabilités.
   (b) en utilisant la fonction caractéristique.

Exercice 3. Loi normal.

1. On suppose connue la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$: $\phi(t) = e^{-t^2/2}$. En déduire la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
2. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variable aléatoire indépendantes telles que pour tout i, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. En utilisant la fonction caractéristique, montrer que
$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$
3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes normales centrée réduites. Utiliser la fonction caractéristique pour en déduire la loi de $(X + Y, X - Y)$.
4. En utilisant la relation entre la fonction caractéristique et ses moments, en redéduire $\mathbb{E}\,[X^n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Correction exercice 3</u> :

1. Vu en TD.

2. Vu en TD.

3. On a

$$\begin{aligned}
\phi_{(X+Y,X-Y)}(t_1,t_2) &= \mathbb{E}\left[e^{i(t_1(X+Y)+t_2(X-Y))}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iX(t_1+t_2)}e^{iY(t_1-t_2)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iX(t_1+t_2)}\right]\mathbb{E}\left[e^{iY(t_1-t_2)}\right] \qquad \text{car } X \text{ est indépendante de } Y \\
&= \phi_X(t_1+t_2)\phi_Y(t_1-t_2) \\
&= e^{-(t_1+t_2)^2/2}e^{-(t_1-t_2)^2/2} \\
&= e^{-(t_1^2+2t_1t_2+t_2^2)/2-(t_1^2-2t_1t_2+t_2^2)/2} \\
&= e^{-(t_1^2+t_2^2)} \\
&= e^{-\frac{(\sqrt{2})^2t_1^2}{2}}e^{-\frac{(\sqrt{2})^2t_2^2}{2}} \\
&= \phi_{(U,V)}(t_1,t_2)
\end{aligned}$$

avec U,V indépendante et de loi $\mathcal{N}(0,\sqrt{2})$. En effet, d'après la question 1, la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,\sigma)$ est $e^{-\sigma^2t^2/2}$.

Comme la fonction caractéristique caractérise la loi, on en déduit que $(X+Y,X-Y)$ a même loi que (U,V), c'est à dire la probabilité produit de deux loi $\mathcal{N}(0,\sqrt{2})$ dont la densité est donnée par

$$f_{(X+Y,X-Y)}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-(u^2+v^2)/4}.$$

4. D'après le cours, si X a un moment d'ordre k, alors ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^k$ et

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad \phi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}\left[(iX)^ke^{iXt}\right].$$

En particulier,

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}\left[X^k\right].$$

D'autre part, l'exponentielle est développable en série entière (avec rayon de convergence infini) :

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= e^{-t^2/2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t^2/2)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^kk!}t^{2k}
\end{aligned}$$

Maintenant, la relation entre les coefficients de la série entière et les dérivés de la fonction donne :

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_X^{(n)}(0)}{n!}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\mathbb{E}\left[X^n\right]}{n!}t^n.$$

En identifiant les coefficient de la série entière, on trouve que $\mathbb{E}\left[X^n\right] = 0$ si n est impair et

$$\frac{i^{2k}\mathbb{E}\left[X^{2k}\right]}{(2k)!} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}$$

Soit

$$\boxed{\mathbb{E}\left[X^{2k}\right] = \tfrac{(2k)!}{2^k k!}.}$$

Exercice 4. Loi de Poisson.
Soit X une variable aléatoire de poisson de paramètre λ.

1. Calculer la fonction caractéristique ϕ_X de X.
2. En déduire $\phi_{\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}$.
3. Montrer que $\phi_{\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}$ converge simplement vers la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque λ tend vers l'infini.
   Remarque : on dit que $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque λ tend vers l'infini.

<u>Correction exercice 4</u> :

1.
$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\mathbb{P}\left[X = k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} \\
&= e^{\lambda(e^{it}-1)}.
\end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}}$$

2. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\phi_{\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) &= \mathbb{E}\left[e^{it\left(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)}\right] \\
&= e^{-it\sqrt{\lambda}}\mathbb{E}\left[e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}X}\right] \\
&= e^{-it\sqrt{\lambda}}\phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) \\
&= e^{\lambda(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1)-it\sqrt{\lambda}}
\end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_{\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) = e^{\lambda(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1)-it\sqrt{\lambda}}}$$

3. En utilisant un développement limité en 0 à l'ordre 2, on trouve

$$e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}} - 1 = \frac{it}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{\lambda} + \underset{\lambda\to\infty}{o}(1/\lambda)$$

d'où

$$\begin{aligned}\phi_{\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) = e^{\lambda(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1)-it\sqrt{\lambda}} &= e^{\lambda(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\lambda}+\underset{\lambda\to\infty}{o}(1/\lambda))-it\sqrt{\lambda}} \\ &= e^{-t^2/2+\underset{\lambda\to\infty}{o}(1)}\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_{\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2/2} = \phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t)}$$

Exercice 5.
Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que ϕ_X est à valeurs réelles si et seulement si X a une loi symétrique, c'est-à-dire si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$.
2. En déduire que si X et Y sont des variables aléatoires réelles, indépendantes et de même loi, alors $Z = X - Y$ a une loi symétrique.
3. Existe-t-il X et Y réelles, indépendantes et de même loi telles que $X - Y \sim \mathcal{U}([-1,1])$?

Correction exercice 5 :

1.

$$\phi_X \text{ est à valeurs réelles } \iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_X(t) = \overline{\phi_X(t)}$$

Or

$$\begin{aligned}\overline{\phi_X(t)} &= \overline{\mathbb{E}\left[e^{itX}\right]} \\ &= \mathbb{E}\left[\overline{e^{itX}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-itX}\right] \\ &= \phi_{-X}(t).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\phi_X \text{ est à valeurs réelles } &\iff \phi_X = \phi_{-X} \\ &\iff X \text{ et } -X \text{ on même loi} \\ &\iff \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}.\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\phi_{X-Y}(t) &= \mathbb{E}\left[e^{it(X-Y)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{itX}e^{-itY}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]\mathbb{E}\left[e^{-itY}\right] && \text{car } X \text{ est indépendante de } Y \\
&= \phi_X(t)\phi_{-Y}(t) \\
&= \phi_X(t)\phi_{-X}(t) && \text{car } X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \\
&= \phi_X(t)\overline{\phi_X(t)} \\
&= |\phi_X(t)|^2 \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

D'après la question 1, on en déduit que $X - Y$ a une loi symétrique.

3. D'après la question précédente, on a que

$$\phi_{X-Y}(t) = |\phi_X(t)|^2 \geq 0.$$

Or, la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{U}([-1,1])$ est donnée par (exercice) :

$$\phi_{\mathcal{U}([-1,1])}(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Et cette fonction n'est pas positive ... Il ne peut donc pas exister de variables aléatoires X et Y réelles, indépendantes et de même loi telles que $X - Y \sim \mathcal{U}([-1,1])$.