

TD 2

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Exercice 1.

Une urne contient N billes, dont R billes rouges. On y tire deux billes uniformément au hasard, et on note A : «La première bille est rouge» et B : «la deuxième bille est rouge».

1. Déterminer $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$ et $\mathbb{P}[A \cap B]$. En déduire que A et B ne sont pas indépendants.
2. On fixe une proportion $p \in [0, 1]$ de billes rouges (soit $R = \lfloor pN \rfloor$). Que dire du «défaut d'indépendance» $\mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ lorsque N tend vers l'infini ?

Exercice 2.

Un laboratoire a mis au point un test pour détecter une maladie qui touche 0.1% de la population. Le test est fiable à 99%, c'est à dire que pour une personne infectée, le résultat du test est positif dans 99% des cas et que pour une personne saine, il est positif dans 1% des cas.

Un individu est testé positivement. Quelle est la probabilité qu'il soit sain ? Inversement, quelle est la probabilité qu'un individu testé négativement soit en fait infecté ?

Exercice 3.

On lance 3 fois une pièce de monnaie équilibrée. On note B_1 : «la pièce tombe du même côté au 2^{ème} et 3^{ème} lancers», B_2 : «la pièce tombe du même côté au 1^{er} et 3^{ème} lancers» et B_3 : «la pièce tombe du même côté au 1^{er} et 2^{ème} lancers».

1. Construire un espace probabilisé qui modélise trois lancers de pièce indépendants.
2. Montrer que B_1, B_2 et B_3 sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 4.

Soient A, B, C trois événements de probabilité non nulle sur un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . On note \mathbb{P}_C la probabilité définie par $\mathbb{P}_C[E] = \mathbb{P}[E|C]$. À quelle condition les événements A et B sont-ils indépendants pour \mathbb{P}_C ?

- a) A et B sont tous deux indépendants de C pour \mathbb{P} .
- b) A, B, C sont deux à deux indépendants pour \mathbb{P} .
- c) A, B, C sont mutuellement indépendants pour \mathbb{P} .
- d) A et B sont indépendants pour \mathbb{P} .

Exercice 5.

On considère deux espaces probabilisés discrets (Ω_1, \mathbb{P}_1) et (Ω_2, \mathbb{P}_2) , et on définit leur espace produit

$$(\Omega, \mathbb{P}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2).$$

Lesquelles des propositions suivantes sont vraies ?

- a) Pour tous $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\mathbb{P}[\{\omega_1, \omega_2\}] = \mathbb{P}[\{\omega_1\}] \mathbb{P}[\{\omega_2\}]$.
- b) Pour tous $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\mathbb{P}[\{\omega_1, \omega_2\}] = \mathbb{P}_1[\{\omega_1\}] \mathbb{P}_2[\{\omega_2\}]$.
- c) Pour tous $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, $\mathbb{P}[\{\omega\}] = \mathbb{P}_1[\{\omega_1\}] \mathbb{P}_2[\{\omega_2\}]$.
- d) Pour tous $A_1 \subset \Omega_1$ et $A_2 \subset \Omega_2$, A_1 et A_2 sont indépendants.
- e) Pour tous $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, A et B sont indépendants.
- f) Pour tous $A_1 \subset \Omega_1$ et $A_2 \subset \Omega_2$, $A_1 \times \Omega_2$ et $\Omega_1 \times A_2$ sont indépendants.

Exercice 6.

Une personne a deux enfants. Lorsqu'on lui demande si elle a une fille, elle répond «Oui !»

Quelle est la probabilité que cette personne ait deux filles ?

(*) Même question si cette personne répond «Oui !» à la question «Avez-vous une fille née un Lundi ?».