TD 8

Moments, variance et covariance

Exercice 1. Loi exponentielle.
Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Calculer l'espérance, la variance et la médiane de X.

Exercice 2. Moments de la Gaussienne.
Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer $m_n := \mathbb{E}[X^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, où $\mathrm{Var}(X) = 1$ et $\mathrm{Var}(Y) = 2$. Calculer $\mathrm{Var}(Z)$, où $Z = 2X - Y - 5$.

Exercice 4.
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire continu, de densité

$$f(x,y) = kx\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y),$$

où k est une constante. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 5.
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire continu, de densité

$$f(x,y) = \frac{k}{\sqrt{xy}}\mathbb{1}_D(x,y),$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x \leq y \leq 1\}$ et k une constante positive à déterminer.

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer les densités de X et Y.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 6.
Donner un exemple de deux variables aléatoires X et Y telles que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ mais X et Y ne soient pas indépendantes.

Exercice 7.
Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable. Montrer que

$$\mathrm{Var}(X) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X-a)^2\right].$$

Exercice 8. Moments et fonction de survie.
Soit X une variable aléatoire réelle positive. Montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[X^p\right] = \int_0^\infty p\, t^{p-1}\, \mathbb{P}\left[X > t\right] \mathrm{d}t.$$

Indication : commencer par montrer que

$$\mathbb{E}\left[X^p\right] = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} p\, t^{p-1} \mathbb{1}_{t<x} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\mathbb{P}(x).$$

Exercice 9. Loi faible des grands nombres.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d (indépendantes et identiquement distribuées) de carré intégrable.

1. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right]$ et $\mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)$.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mathbb{E}\left[X_1\right]\right| \geq \varepsilon\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque : on dit que la suite de variable aléatoires $(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n})_{n\in\mathbb{N}*}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}\left[X_1\right]$.