TD 9

Convolution et fonction caractéristique.

Exercice 1. Covariance en dimension supérieure.
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur aléatoire de matrice de covariance

$$\mathrm{Cov}\,(X) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculer $\mathrm{Var}\,(3X_1 - X_2 + 2X_3)$.

Exercice 2. Loi exponentielle.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, où $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\beta)$, avec $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha \neq \beta$.
   (a) Donner la loi de $X + Y$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}\,[X < Y]$.
2. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variable aléatoire i.i.d de loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$:
   (a) en calculant le produit de convolution des probabilités.
   (b) en utilisant la fonction caractéristique.

Exercice 3. Loi normal.

1. On suppose connue la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $\phi(t) = e^{-t^2/2}$. En déduire la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
2. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variable aléatoire indépendantes telles que pour tout i, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. En utilisant la fonction caractéristique, montrer que
$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$
3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes normales centrée réduites. Utiliser la fonction caractéristique pour en déduire la loi de $(X+Y, X-Y)$.
4. En utilisant la relation entre la fonction caractéristique et ses moments, en redéduire $\mathbb{E}\,[X^n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Loi de Poisson.
Soit X une variable aléatoire de poisson de paramètre λ.

1. Calculer la fonction caractéristique ϕ_X de X.
2. En déduire $\phi_{\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}$.

3. Montrer que $\phi_{\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}$ converge simplement vers la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque λ tend vers l'infini.
   Remarque : on dit que $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque λ tend vers l'infini.

Exercice 5.
Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que ϕ_X est à valeurs réelles si et seulement si X a une loi symétrique, c'est-à-dire si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$.

2. En déduire que si X et Y sont des variables aléatoires réelles, indépendantes et de même loi, alors $Z = X - Y$ a une loi symétrique.

3. Existe-t-il X et Y réelles, indépendantes et de même loi telles que $X - Y \sim \mathcal{U}([-1,1])$?