ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2019-2020 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

Éléments de correction TD n° 1

Martingales discrètes et temps d'arrêts

Exercice 1 : Les martingales de la marche aléatoire simple.

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit la *marche aléaoire simple* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)$-adapté.
2. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{\lambda S_n - n\ln(\cosh\lambda)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des $(\mathcal{F}_n)$-martingales.

Correction exercice 1 : Exercice corrigé en classe.

Exercice 2 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On définit le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Y_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$. Montrez que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

Correction exercice 2 :

— Le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-adapté car $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_n$-mesurable.

— Pour tout entier n, la variable aléatoire Y_n est intégrable car on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_n|] &= \mathbb{E}[\,|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]|\,] \\ &\leq \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[\,|X|\,|\mathcal{F}_n]\,] \\ &= \mathbb{E}[\,|X|\,] < +\infty. \end{aligned}$$

— Enfin, pour tout entier n,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \text{ (car } \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}) \\ &= Y_n. \end{aligned}$$

Le processus stochastique $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une martingale.

Exercice 3 : Propriétés des temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soient S et T deux temps d'arrêt discrets par rapport à cette filtration.

1. Montrez que $S \wedge T = \min(S,T)$, $S \vee T = \max(S,T)$ et $S+T$ sont aussi des temps d'arrêt.
2. Montrez que, si $S \le T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
3. * Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez que la variable $Y_T = \mathbf{1}_{T<\infty} X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Correction exercice 3 :

1. Les variables $S\wedge T$, $S\vee T$ et $S+T$ sont bien des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Ensuite, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\{S\wedge T \le n\} &= \{S\le n\}\cup\{T\le n\}\\ \{S\vee T \le n\} &= \{S\le n\}\cap\{T\le n\}\\ \{S+T = n\} &= \bigcup_{i=0}^{n}\{S=i\}\cap\{T=n-i\}.\end{aligned}$$

   Or, S et T sont des temps d'arrêts, donc tous les événements $\{S\le n\}$, $\{S=i\}$ et $\{T\le n\}$, $\{T=n-i\}$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurables si $i\le n$.

   On en conclut que $S\wedge T$, $S\vee T$ et $S+T$ sont des temps d'arrêts.

2. Soit $A\in\mathcal{F}_S$. Il faut montrer que $A\in\mathcal{F}_T$. Pour cela, montrons que pour tout entier n, $A\cap\{T\le n\}\in\mathcal{F}_n$. On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}A\cap\{T\le n\} =&\ A\cap\{S\le T\le n\}(\text{car } S\le T)\\ =&\ A\cap\{S\le n\}\cap\{T\le n\},\end{aligned}$$

   qui appartient à $\mathcal{F}_n$ car $A\in\mathcal{F}_S$ donc $A\cap\{S\le n\}\in\mathcal{F}_n$ et $\{T\le n\}\in\mathcal{F}_n$ car T est un temps d'arrêt.

   On a donc bien que $\mathcal{F}_S\subseteq\mathcal{F}_T$.

3. * Soit $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrons que $\{Y_T\in A\}\in\mathcal{F}_T$ en montrant que :
   — $\{Y_T\in A\}\in\mathcal{F}$ (où $\mathcal{F}$ est la tribu sous-jacente à l'espace de probabilité qui contient en particulier toutes les sous-tribus $\mathcal{F}_n$ de la filtration)
   — $\{Y_T\in A\}\cap\{T\le n\}\in\mathcal{F}_n$

   Pour le premier point, il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned}\{Y_T\in A\} &= \bigcup_{k=0}^{+\infty}\{Y_T\in A\}\cap\{T=k\}\bigcup\{Y_T\in A\}\cap\{T=+\infty\}\\ &= \bigcup_{k=0}^{+\infty}\{X_k\in A\}\cap\{T=k\}\bigcup\{0\in A\}\cap\{T=+\infty\}\end{aligned}$$

qui appartient à la tribu $\mathcal{F}$ car les variables aléatoires X_k et T sont mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}$.

Ensuite,

$$\{Y_T \in A\} \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k \in A\} \cap \{T = k\}$$

qui appartient à $\mathcal{F}_n$ car X_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable ainsi que $\{T = k\}$ donc $\{X_k \in A\} \cap \{T = k\}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Cela prouve que Y_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

<u>Exercice 4</u> : Temps d'arrêts et marche aléatoire.

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple issue de 0 définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ si $n \geq 1$ où les $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des v.a i.i.d de loi $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dire dans chaque cas si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts.

1. $\tau = \inf\{n \geq 1,\ S_n = 0\}$.
2. $T = \max\{n \in \{0, ..., 4\},\ S_n = 0\}$.

<u>Correction exercice 4</u> : (proposée par Hugo Vaneuville)

1. Montrons que τ est un temps d'arrêt. Pour cela, on montre que $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, τ est le premier temps (plus grand que 1) de retour en 0. Donc, si $n = 0$, alors $\{\tau \leq n\} = \emptyset$ et si $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}\{\tau \leq n\} &= \{\text{ la marche aléatoire est revenue en 0 avant le temps } n\} \\ &= \cup_{k=1}^{n} \{Y_1 + \cdots + Y_k = 0\}\,.\end{aligned}$$

   Or, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $Y_1, \cdots, Y_k$ sont des variables aléatoires réelles mesurables par rapport à $\mathcal{F}_n$ par définition de cette tribu. Donc la somme $Y_1 + \cdots + Y_k$ est aussi mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$, ce qui implique que $\{Y_1 + \cdots + Y_k = 0\} \in \mathcal{F}_n$.

2. Montrons que T n'est pas un temps d'arrêt. Supposons par l'absurde que c'est un temps d'arrêt. Cela implique que $\{T = 2\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_2$. Or, $\mathcal{F}_2$ est indépendante de $\sigma(Y_3, Y_4)$, donc $\{T = 2\}$ est indépendant de $\{Y_3 + Y_4 = 0\}$ et on obtient que :

$$\mathbb{P}\left[T = 2 \text{ et } Y_3 + Y_4 = 0\right] = \mathbb{P}\left[T = 2\right]\mathbb{P}\left[Y_3 + Y_4 = 0\right]\,.$$

   Or le membre de gauche est nul car si $T = 2$ alors $S_2 = 0$ et $S_4 \neq 0$ donc $Y_3 + Y_4 \neq 0$. Par ailleurs, le membre de droite est strictement positif car $T = 2$ si et seulement si $X_1 = -X_2$ (ce qui a probabilité 1/2 par indépendance de Y_1 et Y_2) et $\mathbb{P}\left[Y_3 + Y_4 = 0\right] = 1/2$ donc est strictement positive. On est bien arrivés à une contradiction.

<u>Exercice 5</u> : Martingale et processus prévisible

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un *processus prévisible* qui signifie, par définition, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout n, H_n est borné et on définit le processus $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $N_0 = 0$ et

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1}) \text{ si } n \geq 1\,.$$

1. Montrez que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit T un temps d'arrêt. En appliquant le résultat de la question précédente avec $H_k := \mathbf{1}_{T\geq k}$, en déduire que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, alors il en est de même pour le processus arrêté $(M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Correction exercice 5</u> :

1. (proposée par Hugo Vaneuville) Le vocabulaire "prévisible" vient de l'observation suivante : H_k étant mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{k-1}$, on connaît déjà cette variable aléatoire si on a toute l'information disponible avant le temps $k-1$.
   Montrons que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale. Pour cela on montre les trois propriétés suivantes :
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Le cas $n = 0$ vient du fait que N_0 est une constante donc est mesurable par rapport à n'importe quelle tribu. Pour $n \geq 1$, remarquons d'abord que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, M_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable et H_k, M_{k-1} sont $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable. Par croissance de la filtration, ils sont $\mathcal{F}_n$-mesurable, donc N_n est obtenu à partir de sommes et produits finis de variables $\mathcal{F}_n$-mesurables donc est $\mathcal{F}_n$-mesurable.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_n est intégrable. Comme une somme de variables intégrables est intégrable, il suffit de montrer que pour tout $k \geq 1$, $H_k M_{k-1}$ et $H_k M_k$ sont intégrables. Or pour tout $k \geq 1$ il existe $A_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|H_k| \leq A_k$ et donc :

   $$\mathbb{E}\left[|H_k M_k|\right] \leq A_k \mathbb{E}\left[|M_k|\right]\,.$$

   $\mathbb{E}\left[|M_k|\right]$ est fini car $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_m)_{m\in\mathbb{N}}$-martingale donc $\mathbb{E}\left[|H_k M_k|\right]$ est bien fini. On raisonne de même pour $\mathbb{E}\left[|H_k M_{k-1}|\right]$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left[N_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = N_n$. On a :

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{E}\left[N_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[N_n + H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] \\
   &= N_n + \mathbb{E}\left[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] \text{ (car } N_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable)} \\
   &= N_n + H_{n+1}\mathbb{E}\left[M_{n+1} - M_n \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] \text{ (car } H_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable)}\,.
   \end{aligned}$$

Finalement, $\mathbb{E}\left[M_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = M_n$ car $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_m)_{m\in\mathbb{N}}$-martingale et $\mathbb{E}\left[M_n \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = M_n$ car M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. On a donc bien $\mathbb{E}\left[N_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = N_n$.

2. Remarquons pour commencer que $\{T \geq k\} = \{T \leq k-1\}^c$ appartient à $\mathcal{F}_{k-1}$ pour tout entier non nul k. Cela prouve que $H_k = \mathbf{1}_{T\geq k}$ est bien un processus prévisible. Ensuite, on vérifie que si $T \leq n$, alors

$$\begin{aligned} N_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{T\geq k}(M_k - M_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{T} (M_k - M_{k-1}) = M_T - M_0, \end{aligned}$$

et que si $T > n$, alors,

$$\begin{aligned} N_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{T\geq k}(M_k - M_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - M_{k-1}) = M_n - M_0. \end{aligned}$$

On a donc que $N_n = M_{T\wedge n} - M_0$. Par ailleurs, d'après la question précédente, N_n est une martingale. Il en suit que le processus arrêté $M_{T\wedge n} = N_n + M_0$ est également une martingale.

<u>Exercice 6</u> : La ruine du joueur.

Deux joueurs, le joueur A possédant initialement a euros et le joueur B en possédant b, jouent au jeu suivant. A chaque coup, les deux joueurs misent un euro et on lance une pièce de monnaie équilibrée. Si le résultat de la pièce est pile, le joueur A remporte la mise et si le résultat de la pièce est face, le joueur B remporte la mise. Le jeu cesse quand l'un des deux est ruiné.

1. En reprenant les notation de l'exercice 1, on note $Y_n = 1$ si le résultat du n^{e} lancer est pile et $Y_n = -1$ si c'est face. Soit S_n l'argent du joueur A au temps n. On a donc :

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Soit

$$T = \inf\{n,\ S_n \in \{0, a+b\}\}.$$

Justifier que T définit bien un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Quel interprétation donner au temps d'arrêt T et aux évènements $\{S_T = 0\}$ et $\{S_T = a+b\}$?

2. On admet que $T < +\infty$ presque sûrement. En appliquant le théorème d'arrêt à $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la probabilité que A gagne la fortune de B.

3. * Démontrer que $T < +\infty$ presque sûrement.

Correction exercice 6 : Il s'agit d'un exercice important qui met en jeu la notion de martingales, de temps d'arrêts et une application du théorème d'arrêt.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned}\{T \le n\} &= \{\exists k \in [\![0,n]\!],\ S_k \in \{0, a+b\}\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{S_k \in \{0,a+b\}\}}_{\in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n},\end{aligned}$$
et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$ puis $\boxed{T \text{ est un temps d'arrêt.}}$
Le temps d'arrêt T représente la fin de la partie, l'événement $\{S_T = 0\}$ correspond à la ruine du joueur A alors que l'événement $\{S_T = a+b\}$ correspond à "A gagne la fortune de B".

2. On aimerait appliquer le théorème d'arrêt, aux temps d'arrêts 0 et T afin de calculer $\mathbb{E}[S_T]$ et d'en déduire $\mathbb{P}(S_T = a+b)$. Malheureusement, T n'est pas un temps d'arrêt borné... On applique donc le **théorème d'arrêt** à la martingale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et aux temps d'arrêts bornés $0 \le T \wedge n$ (on sait que c'est un temps d'arrêt comme minimum de 2 temps d'arrêts d'après l'exercice 3). On en déduit que
$$\mathbb{E}\left[S_{T\wedge n} \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] = S_0,$$
et donc en passant à l'espérance
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_{T\wedge n}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[S_{T\wedge n} \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[S_0\right] = a.\end{aligned}$$
Maintenant, on va utiliser le théorème de convergence dominée et faire tendre n vers l'infini. Comme T est fini presque sûrement, on a que
$$S_{T\wedge n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} S_T.$$
De plus, on a la domination
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |S_{T\wedge n}| \le a+b,$$
car S_n est compris entre 0 et $a+b$ pour tout entier n inférieur ou égal à T. On peut donc appliquer le **théorème de convergence dominée** pour en déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[S_{T\wedge n}\right] = \mathbb{E}\left[S_T\right],$$
et donc que
$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = a.$$
Par ailleurs, S_T ne prend que deux valeurs : 0 ou $a+b$. On en déduit
$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = (a+b)\mathbb{P}\left(S_T = a+b\right).$$
et finalement

$$\boxed{\mathbb{P}\left(S_T = a+b\right) = \tfrac{a}{a+b}.}$$

$\boxed{\text{Le joueur } A \text{ gagne donc la fortune de } B \text{ avec probabilité } \tfrac{a}{a+b}.}$ On remarque que si les deux joueurs partent avec la même somme d'argent ($a = b$) chaque joueur à une chance sur deux de remporter la mise de l'autre.

3. Si $\{T = +\infty\}$, alors la marche aléatoire reste comprise entre 1 et $a+b-1$ pour tout n et donc en particulier, elle ne peut pas monter de 1 sur $a+b$ temps consécutifs. Nous allons montrer que presque sûrement, il arrive un instant où la marche aléatoire simple monte de 1 sur $a+b$ temps consécutifs. Pour cela, on définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'événement :

$$A_k := \bigcap_{i=1}^{(a+b)} \{Y_{(a+b)k+i} = 1\}.$$

Si un des A_k est réalisé, alors la marche aléatoire monte de 1 sur $a+b$ temps consécutifs (entre les temps $(a+b)k$ et $(a+b)(k+1)$) et donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas rester bornée entre 1 et $a+b-1$ et donc $T < +\infty$. En résumé :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subseteq \{T < +\infty\}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k^c\right) \\
&= 1 - \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c) && \text{car les } A_k \text{ sont indépendants} \\
&= 1 - \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\
&= 1 - \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \prod_{i=1}^{a+b} \mathbb{P}(Y_{(a+b)k+i} = 1)\right) && \text{car les } Y_i \text{ sont indépendants} \\
&= 1 - \prod_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)}_{<1} \\
&= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{P}\left(T < +\infty\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = 1.$$

et donc $\boxed{T \text{ est fini presque sûrement.}}$