ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2019-2020 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 5

FORMULE D'ITÔ ET EDS.

Exercice 1 : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Pour décrire la dynamique des taux courts, en particulier dans le modèle de Vasicek (1977), on modélise l'évolution du processus de taux par la différentielle stochastique suivante (avec $a, b > 0$) :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

1. Expliquez intuitivement (en ne vous focalisant que sur l'équation stochastique) pourquoi ce processus a une "force de rappel vers b".
2. En appliquant la formule d'Itô au processus $Y_t = (X_t - b)e^{at}$, déterminer la solution de cette EDS, appelée processus de Ornstein-Uhlenbeck.
3. On suppose que $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. Justifiez que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien dont on précisera la fonction espérance et la fonction de covariance. Préciser la loi de X_t, pour tout $t \geq 0$. Quelle est la limite en loi de X_t lorsque $t \to \infty$?
4. ♠ On suppose que X_0 est indépendante de $(W_t)_{t\geq 0}$ et $X_0 \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2/(2a))$. Pourquoi $(X_t)_{t\geq 0}$ est-il un processus Gaussien ? Préciser sa fonction espérance et sa fonction de covariance. Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stationnaire.

Exercice 2 : Une EDS sur $[0, 1[$ (exam 2019)

On considère l'équation différentielle stochastique suivante sur l'intervalle de temps $[0, 1[$:

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_t \tag{1}$$

1. Expliquer intuitivement pourquoi une solution X_t a une force de rappel vers 0 d'intensité tendant vers l'infini. Quelle est le comportement attendu de la solution lorsque t tend vers 1 ?
2. On pose $Y_t := \frac{X_t}{1-t}$. En appliquant la formule d'Itô, trouver une EDS satisfaite par Y_t. En déduire que l'unique solution de (1) est donnée par :

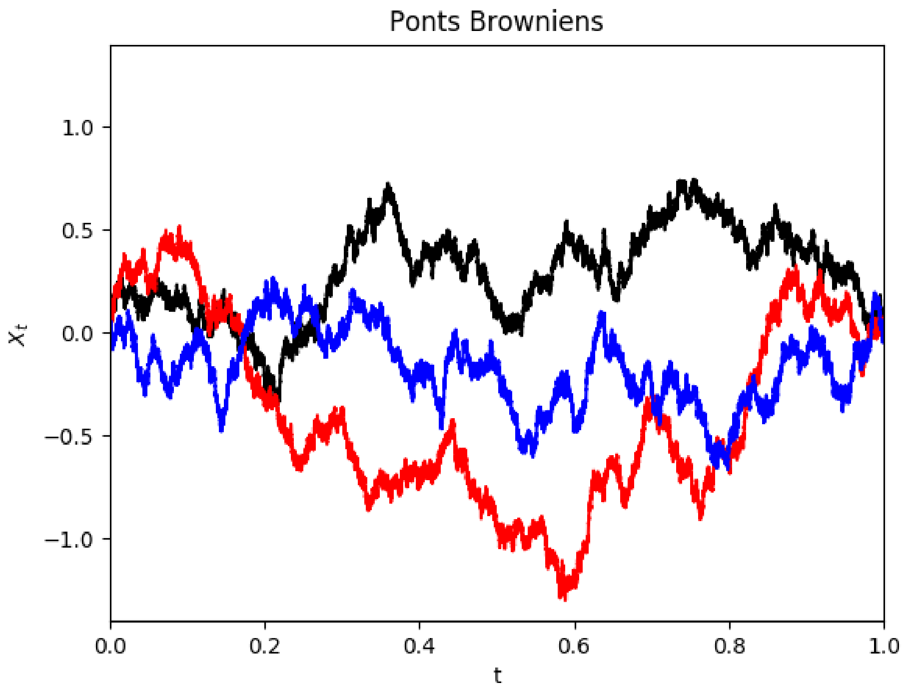
$$X_t = (1-t)X_0 + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dB_t$$

3. On suppose à partir de maintenant que $X_0 = 0$. Expliquer pourquoi (X_t) est un processus Gaussien centré. Montrer que sa fonction de covariance est donnée par :

$$Cov(X_s, X_t) = s(1-t),\ \forall 0 \leq s \leq t < 1$$

4. Montrer que $X_t \xrightarrow[t \to 1]{L^2} 0$.

Remarque : On appelle ce processus Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 en $t = 1$.



Exercice 3 : Equations Différentielles Stochastiques (exam 2019)

1. Soit $Y_t = tX_1(t)X_2(t)$, avec X_1 et X_2 définis par leurs EDS :

$$dX_1(t) = f(t)dt + \sigma_1(t)dB_t$$

$$dX_2(t) = \sigma_2(t)dB_t$$

   Déterminer l'équation différentielle stochastique régissant Y_t.

2. Soit α, β deux constantes. Soit Z défini par son EDS :

$$dZ_t = -\frac{1}{2}\alpha Z_t dt + \frac{1}{2}\beta dB_t.$$

   Soit

$$K_t = Z_t e^{\alpha \frac{t}{2}}.$$

   Déterminer l'équation différentielle stochastique régissant K_t.